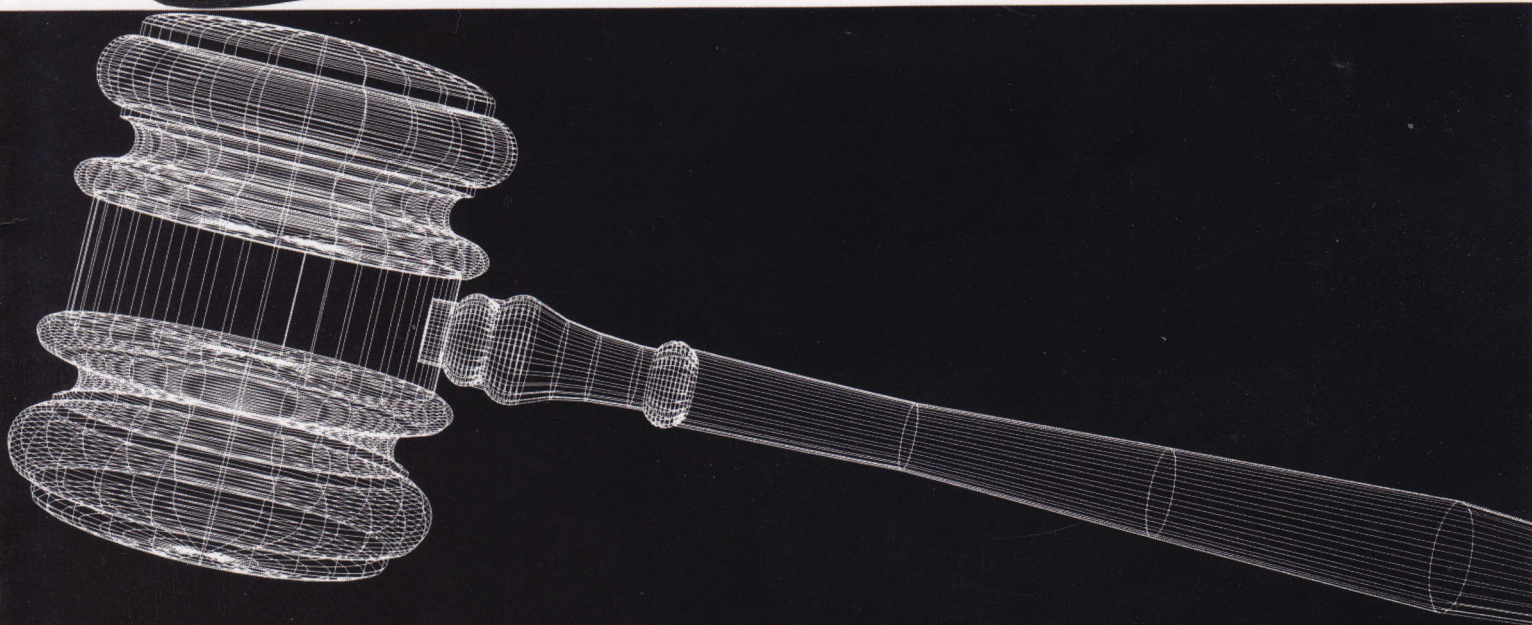


KoG

BROJ 3
Zagreb, 1998.
Cijena 50 kn

ISSN 1331-1611



UPUTE SURADNICIMA

“KoG” je časopis koji objavljuje znanstvene i stručne radove te ostale priloge iz područja konstruktivne geometrije i računalne grafike

ZNANSTVENI I STRUČNI ČLANCI

- 1. Izvorni znanstveni rad** sadrži neobjavljene rezultate izvornih znanstvenih istraživanja, a znanstvene su informacije izložene tako da se točnost analiza i izvoda, na kojima se rezultati temelje, može provjeriti.
- 2. Prethodno priopćenje** znanstveni je rad što sadrži jedan ili više novih znanstvenih podataka priroda kojih zahtijeva hitno objavljivanje. Ne mora nužno imati dovoljno pojedinosti za ponavljanje i provjeru rezultata.
- 3. Pregledni rad** znanstveni je rad što sadrži izvoran, sažet i kritički prikaz jednog područja ili njegova dijela u kojemu autor aktivno djeluje. Mora biti istaknuta uloga autorova izvornog doprinosa u tom području s obzirom na već publicirane radove te pregled tih radova.
- 4. Stručni rad** sadrži korisne priloge iz područja struke koji nisu vezani uz izvorna autorova istraživanja, a iznesena zapažanja ne moraju biti novost u struci.

Rad, duljine do 30.000 znakova, mora biti neobjavljen i ne smije se istodobno ponuditi drugom časopisu. Autor za svoj rad predlaže kategoriju, a konačnu odluku o svrstavanju donosi Izdavački savjet na temelju zaključaka recenzenata.

Rad može biti napisan na hrvatskom, engleskom ili njemačkom jeziku. Autor predaje tekst na jeziku koji odabere, te sažetak na hrvatskom i engleskom jeziku. Sažetak opsegom ne bi trebao biti veći od 600 znakova. Naslov članka mora biti sažet i informativan. Citiranu literaturu treba poredati po abecednom redu prezimena autora. Radovi iz časopisa citiraju se: redni broj, prezime i inicijal imena autora ili skupine autora, naslov rada, naziv časopisa, volumen, godina u zagradi, broj časopisa u godini, broj početne i završne stranice rada. Knjige se citiraju: redni broj, prezime i inicijal imena autora ili skupine autora, naslov knjige, nakladnik, mjesto izdanja, godina.

Članci trebaju biti dopunjeni kontaktnim podacima o autoru: ime i prezime, stručno zvanje, znanstveni stupanj, naziv poduzeća ili ustanove u kojoj radi, adresa ustanove i kuće, brojevi telefona i telefaksa, e-mail adresa, broj žiro-računa.

O prihvaćanju ili odbijanju rada autor će biti obaviješten.

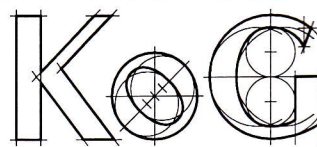
OSTALI PRILOZI

To su stručni osvrti i prikazi različitih sadržaja iz širokog područja geometrije i grafike, vijesti i izvješća o znanstveno-stručnim skupovima, prikazi knjiga, časopisa, studentskih radova, softvera i hardvera, koji se objavljuju u rubrikama “Geometrija i grafika” i “Vijesti, izvješća, prikazi”.

Rukopisi i svi prilozi predaju se uredništvu.

Za znanstvene i stručne radove potrebna su tri ispisa, a za ostale samo jedan. Prihvaćene radove autori dostavljaju elektronskom poštom kao ASCII datoteke. Preporučuje se LaTeX format.

Podrobnije upute dobivaju se u uredništvu.



ISSN 1331-1611

Znanstveno-stručno-informativni časopis Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku

Osnivač i izdavač

Hrvatsko društvo za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku

Izdavački savjet

Sonja Gorjanc, Miljenko Lapaine, Vlasta Szirovicza

Uredništvo

Miroslav Ambruš-Kiš, Jelena Beban-Brkić, Krešimir Fresl, Sonja Gorjanc, Miljenko Lapaine, Lidija Pletenac

Glavna urednica

Sonja Gorjanc

Lektorica

Branka Makovec

Grafičko oblikovanje

Miroslav Ambruš-Kiš

Grafička priprema

Krešimir Fresl (LaTeX)
Miroslav Ambruš-Kiš

Naslovna stranica

Danilo Dučak

LightWave 5.6

Posljednja stranica korica

Sonja Gorjanc

Mathematica 3.0, FreeHand 7.01

Tisak

“O-tisak” d.o.o., Zagreb

Adresa uredništva

Avenija V. Holjevca 15

10010 Zagreb, Hrvatska

telefon: 01 670 509

telefaks: 01 66 00 642

e-mail: kog@master.grad.hr

KoG na Internetu

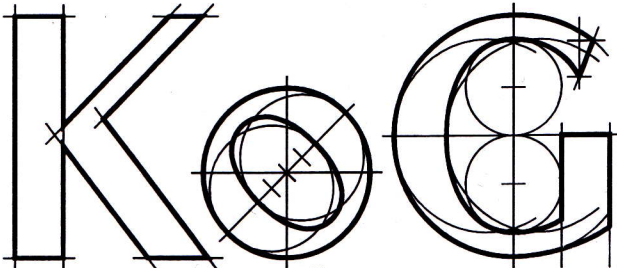
<http://www.mzt.hr/mzt/hrv/info/hdk/kogman/htm>

Naklada

250

Izlazi jednom na godinu

Izlazak ovoga broja materijalno je pomoglo Ministarstvo znanosti i tehnologije RH



ZNANSTVENO-STRUČNO-INFORMATIVNI ČASOPIS
HRVATSKOG DRUŠTVA ZA KONSTRUKTIVNU GEOMETRIJU I KOMPJUTORSKU GRAFIKU

SADRŽAJ

IN MEMORIAM

Mirko Polonijo: Akademik Stanko Bilinski (1909.-1998.) 4

IZVORNI ZNANSTVENI RADOVI

Zdravka Božikov: O simetričnim dizajnama s parametrima (101,25,6) 11

Márta Szilvási-Nagy: Zatvaranje cijevi proširenjem B-spline ploha 13

Attila Böleskei, Emil Molnár: Kako projektirati lijepo popločavanje? 21

Ana Sliječević: Krivulje žarišta u pramenovima krivulja drugog reda i drugog razreda u izotropnoj ravnini 29

STRUČNI RADOVI

Miljenko Lapaine, Miroslava Lapaine: Krivulja središta pramena konika 35

GEOMETRIJA I GRAFIKA

Ana Sliječević: U povodu 100. obljetnice deskriptivne geometrije na Zagrebačkom sveučilištu 41

Lidija Pletenac: CAD softverski alat u geometrijskom modeliranju 43

Jelena Beban-Brkić, Nikoleta Sudeta: Mjesto geometrije u nastavi 45

Miljenko Lapaine i drugi: Crtež u znanosti 48

VIJESTI, IZVJEŠĆA, PRIKAZI 65

GUIDE TO THE COLLABORATORS

“KoG” is the journal publishing scientific and professional papers and other contributions from the field of constructive geometry and computer graphics.

SCIENTIFIC AND PROFESSIONAL PAPERS

- 1. Original scientific paper** contains unpublished results of the original scientific research, and the scientific information is presented in such a way that it permits the exactness of analysis and derivations the results are based upon to be checked.
- 2. Preliminary communication** is a scientific work containing one or more new scientific data, the nature of which requests urgent publishing. It need not necessarily convey sufficient number of details for repetition or checking of results.
- 3. Review** is a scientific paper containing original, condensed and critical presentation of a field or its segment in which the author participates actively. The role of the author's original contribution in this field must be pointed out as related to already published works, accompanied by the survey of these works.
- 4. Professional paper** contains useful contributions from the professional field which are not bound to the original research of the author, and the observations presented need not be a novelty in the profession.

The paper containing 30.000 characters should be unpublished and it mustn't be offered to some other journal at the same time. The author suggests for his/her paper the category, and the final decision about how it is going to be classified is reached by the Publishing Council on the basis of the conclusions made by reviewers.

The paper can be written in Croatian, English or German. Author hands in the text in the language he/she has chosen, and the abstract in Croatian and English. The abstract should not exceed 600 characters. Paper title should be concise and informative. The reference should be listed in alphabetical order by author's family name. The papers from journals are to be cited as follows: number, author's or group of author's last name, initials, title of reference article, name of journal, volume, the year of publication in parenthesis, number of journal in the year, number of the first and end page of the paper. Books are cited as follows: number, author's last name, author's initials, title of the book, publisher, city, year of publishing.

The articles should be supplemented by the notes to authors: name, last name, title, scientific degree, name of the firm or institution he/she works at, home and institution address, phone and fax numbers, e-mail, number of bank account.

Author will be notified about his paper being either accepted or rejected.

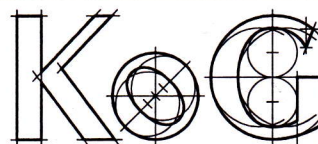
OTHER ATTACHMENTS

These are professional reviews and presentations of various contents from the wider area of geometry and graphics, news and reports about scientific and professional gatherings, presentations of books, journals, student papers, softwares and hardwares published in the departments on “Geometry and Graphics” and “News, reports and presentations”.

Manuscripts and all attachments are to be sent to the Editorial. For scientific and professional papers three copies are needed, for all other only one is enough.

Accepted papers are to be sent by authors by electronic mail as ASCII files. LaTeX format is recommended.

More detailed instructions are available from the Editorial.



ISSN 1331-1611

Scientific and Professional Information Journal of
Croatian Society for Constructive Geometry and
Computer Graphics

Founder and Publisher

Croatian Society for Constructive
Geometry nad Computer Graphics

Board of Trustees

Sonja Gorjanc, Miljenko Lapaine,
Vlasta Szirovicza

Editorial Board

Miroslav Ambruš-Kiš, Jelena Be-
ban-Brkić, Krešimir Fresl, Sonja
Gorjanc, Miljenko Lapaine, Lidija
Pletenac

Editor-in-Chief

Sonja Gorjanc

Design

Miroslav Ambruš-Kiš

Layout

Krešimir Fresl (LaTeX)
Miroslav Ambruš-Kiš

Front Page Illustration

Danilo Dučak

LightWave 5.6

Back Cover Illustration

Sonja Gorjanc

Mathematica 3.0, FreeHand 7.01

Print

“O-tisak” d.o.o., Zagreb

Editorial Address

Avenija V. Holjevcva 15
10010 Zagreb, CROATIA

phone: + 385 1 670 509

fax: + 385 1 66 00 642

e-mail: kog@master.grad.hr

KoG on Internet

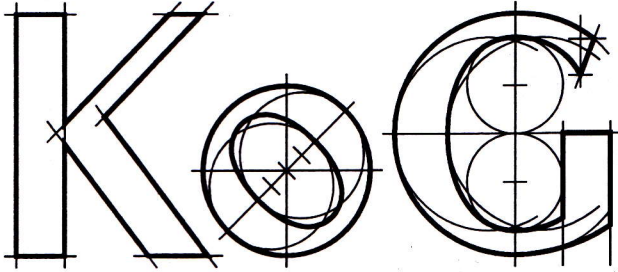
<http://www.mzt.hr/mzt/hrv/info/hdk/kogmain/htm>

Circulation

250

Published annually

This issue has been financially supported by
Croatian Ministry of Science and Technology



SCIENTIFIC AND PROFESSIONAL INFORMATION JOURNAL OF
CROATIAN SOCIETY FOR CONSTRUCTIVE GEOMETRY AND COMPUTER GRAPHICS

CONTENTS

IN MEMORIAM

Mirko Polonijo: Academician Stanko Bilinski (1909-1998) 4

ORIGINAL SCIENTIFIC PAPERS

Zdravka Božikov: On Symmetric Designs with Parameters (101,25,6) 11
Márta Szilvási-Nagy: Closing Pipes by Extension of B-spline Surfaces 13
Attila Böleskei, Emil Molnár: How to Design Nice Tilings? 21
Ana Sliječević: The Focal Curve of the Pencil and the Range of Conics in an Isotropic Plane 29

PROFESSIONAL PAPERS

Miljenko Lapaine, Miroslava Lapaine: Curve of Centers of the Conic Section Pencil 35

GEOMETRY AND GRAPHICS

Ana Sliječević: To Mark the 100th Anniversary of Descriptive Geometry at the University of Zagreb 41
Lidija Pletenac: CAD Software Tools in Geometric Modelling 43
Jelena Beban-Brkić, Nikoleta Sudeta: The Place of Geometry in Teaching 45
Miljenko Lapaine and others: Drawing in Science 48

NEWS, REPORTS, CONTRIBUTIONS 65

MIRKO POLONIJO

Akademik Stanko Bilinski (1909. — 1998.)

Akademik Stanko Bilinski preminuo je u ponedjeljak 6. travnja 1998. u Varaždinu. Bio je umirovljeni redoviti profesor Matematičkog odjela Prirodoslovno-matematičkoga fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, zaslužni hrvatski geometričar koji je svojim dugogodišnjim marljivim i plodonosnim radom i djelovanjem višestruko zadužio našu matematičku znanost i svoje mnogobrojne kolege i učenike. Sprovod je bio u srijedu 8. travnja na zagrebačkome Mirogoju.

Profesor Bilinski, kako smo mu se obraćali svi mi koji smo ga poznavali, rođen je u Našicama 22. travnja 1909. godine, istoga datuma i u istome gradu kao i Izidor Kršnjavi (1845.), volio je naglasiti. Majka mu se zvala Paula, rođena Ištvančić. Otac Stanko rodio se u Beču, a u Našicama je bio šumar kod grofa Pejačevića. Profesor Bilinski imao je tri sestre: Petru (rođ. 1904.), Maru (rođ. 1905.) i Dragu (rođ. 1911.).

Klasičnu gimnaziju polazio je u Vinkovcima i Zagrebu, a 1932. godine diplomirao je teorijsku matematiku na Filozofskom fakultetu u Zagrebu. Od 1934. do 1940. godine bio je gimnazijski profesor matematike u Varaždinu (Franjevačka klasična gimnazija), Skoplju i Sušaku. U to se vrijeme, 1937., oženio Zlatom rođ. Crnić (1908.-1992.) i s njom imao dvoje djece: Halku (rođ. 1938.) i Vandu (rođ. 1944.).

Po povratku u Zagreb, od 1940. do 1946. godine radi kao asistent u Geofizičkom zavodu, gdje se bavio meteorologijom, posebice dinamikom grmljavinskih oblaka. Međutim, njegova je prava ljubav matematika, točnije geometrija, kojoj je posvetio cijeli život. Stoga istodobno radi na doktorskoj disertaciji s temom o homogenim mrežama u ravnini. Doktorirao je 1944. godine (doktor filozofije). Bio je to trinaesti doktorat iz područja matematike obranjen na zagrebačkom Sveučilištu (prvi je postigao David Segen 1889. godine), ujedno posljednji matematički doktorat postignut na Filozofskom fakultetu.

Od 1946. godine, kada je izdvajanjem matematičko-prirodoslovnog odjela iz Filozofskog fakulteta osnovan Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, profesor je Bilinski radio u Geometrijskom zavodu toga fakulteta. Započeo je kao asistent, zatim je bio docent (1948.), pa izvanredni profesor (1952.) i od 1956. godine redoviti profesor.

Godine 1949. postao je predstojnikom Geometrijskog zavoda i tu je dužnost obavljao do umirovljenja 1978. godine.

Istaknimo da se upravo 1998. godine navršila stota obljetnica postojanja Geometrijskog zavoda i da je od svih njegovih predstojnika profesor Bilinski tu dužnost obnašao najdulje.



Kao što je dobro poznato, 1874. godine obnovljeno je Sveučilište u Zagrebu, te je tada osnovan i Mudroslovni fakultet s filozofičko-historičkim i matematičko-prirodoslovnim odjelima, koji su pak podijeljeni na katedre. Katedra za matematiku počela je s radom 1876. godine (predstojnik Karel Zahradnik), a deset godina poslije prerasla je u Matematički seminar (do 1899. predstojnik je Karel Zahradnik, a nakon njegova odlaska u Brno naslijedio ga je Vladimir Varičak). Godina 1898. osnovana je Katedra za deskriptivnu geometriju na Šumarskoj akademiji, utemeljenoj godinu dana prije u sklopu Mudroslovnog fakulteta, točnije, "prislonjenoj" na Mudroslovni fakultet. Prvi je voditelj Katedre za deskriptivnu geometriju bio David Segen, koji je tu dužnost obnašao do umirovljenja krajem šk. g. 1910./11. Te, 1911. godine djelokrug se Katedre proširuje na cijelu geometriju, te je pretvorena u Katedru za (čitavu) geometriju pod vodstvom Jurja Majcena. Krajem iste godine osnovan je Geometrijski seminar predstojnik kojega je bio J. Majcen sve do 1924. godine, kada je iznenada umro. Jedan semestar (ljetni 1924./25.) predstojnik je Marije Kiseljak, a od 1925. do 1929.

Geometrijski seminar postoji samo administrativno (predstojnici: Vladimir Varićak, 1925.-28.; Stjepan Bohnič, 1928.-29.). Godine 1929. predstojnikom postaje Rudolf Cesarec, koji tu dužnost obnaša sve do umirovljenja 1945. godine, a iduće četiri godine v. d. predstojnika je Đuro Kurepa.

Osnutkom Prirodoslovno-matematičkog fakulteta osnovano je pet odsjeka, od kojih je jedan Matematičko-fizički, a seminari mijenjaju naziv u instituti, pa tako dobivamo Institut za geometriju (uz još dva matematička: Instituta za matematiku i Instituta za primijenjenu matematiku). Godine 1959. fakultetski odsjeci Prirodoslovno-matematičkog fakulteta pretvaraju se u odjele, kojih je šest, jer iz Matematičko-fizičkog odsjeka nastaju Matematički odjel i Fizički odjel, a Institut za geometriju mijenja naziv u Zavod za geometriju, koji i danas nosi, premda je uobičajeno govoriti Geometrijski zavod.

Spomenimo da je 1946. godine osnovan i zajednički seminar Instituta za geometriju i Instituta za matematiku pod nazivom Matematički seminar, iz kojeg se Geometrijski seminar izdvojio šk. g. 1960./61., kada je započeo poslijediplomski studij matematike. Upravo je u okviru Geometrijskog seminara profesor Bilinski održao svoje posljednje predavanje na našem Sveučilištu (s naslovom *Porodica otupljenih kvaziregularnih poliedara*). Bilo je to 31. svibnja 1993.

Zapaženo matematičko djelovanje profesor Bilinski provodio je i kroz Društvo matematičara i fizičara, kojega je jedan od utemeljitelja (1949. godine, odnosno 1945., kada je osnovana matematičko-fizička sekcija Hrvatskoga prirodoslovnog društva) i vrlo aktivnih članova; uz ostale dužnosti, bio je i predsjednik Društva od 1959. do 1961. godine. Iz Društva matematičara i fizičara izraslo je 1990. godine Hrvatsko matematičko društvo, koje je za svoj znak odabralo tzv. Blanušin graf.

Zanimljivo je spomenuti kako je dokaz nerješivosti toga grafa postavio profesor Blanuša kao zadatak na jednom kolokviju 1945. i da su dva pristupom bitno različita rješenja (dokaza) dali profesori Blanuša i Bilinski u zajedničkom radu [9].

Kao predsjednik Društva matematičara i fizičara, na godišnjoj skupštini Društva 1960., profesor Bilinski održao je govor pod naslovom *Ekonomsko i kulturno značenje matematike* [25]. Taj zanimljiv i danas suvremen predsjednički govor jasno iskazuje poglede i stavove prof. Bilinskoga o matematici i aktualnim kretanjima u njoj. Navodimo završni odlomak toga govora u skladu s kojim se profesor Bilinski uvijek ponašao i djelovao:

"I doista putovi stvaralačke ljudske svijesti vrlo su složeni, pa bi bio štetan i opasan svaki pokušaj njihovog ograničavanja. Zato smatram, da bi i svako suviše usko shvaćeno planiranje naučne matematičke djelatnosti i ograničavanja naučne tematike donijelo

više trajne štete, nego časovitih neposrednih koristi. Da bi stvaralačka misao ljudska mogla doseći maksimum svoga dometa, ona mora imati osjećaj potpune nezvanosti i apsolutne slobode."

Matematičko-fizička sekcija Hrvatskoga prirodoslovnog društva počela je 1946. izdavati znanstveni časopis *Glasnik matematičko-fizički i astronomski* (koji je izlazio do 1965. godine, kada se dijeli na dva časopisa: *Glasnik matematički* i *Fizika*), kojega je dugogodišnji glavni i odgovorni urednik bio profesor Bilinski (samostalno od 1951. do 1954. godine, sa Zlatkom Jankovićem od 1955. do 1958. godine i Pavlom Papićem od 1959. do 1962. godine). U tom je razdoblju časopis izrastao u uglednu i priznatu matematičku publikaciju, te je razmjenom omogućio pritjecanje velikog broja inozemnih matematičkih časopisa u Hrvatsku.

U razdoblju od 1961. do 1974. znanstveni je rad u matematici bio organiziran u okviru Instituta za matematiku Sveučilišta u Zagrebu, čiji je direktor profesor Bilinski bio od 1962. do 1968. godine.

Dužnost dekana Prirodoslovno-matematičkog fakulteta obnašao je školske godine 1956./57.

Profesor Bilinski je bio dugogodišnji član JAZU, danas HAZU; dopisni (izvanredni) od 1963., a redoviti od 1985. godine. Međunarodno je priznanje doživio i izborom u Austrijsku akademiju znanosti, kao dopisni član od 1980. godine.

Za svoj znanstveni rad profesor je Bilinski 1967. godine dobio nagradu *Ruđer Bošković*, a 1980. državnu (republičku) *Nagradu za životno djelo*.

Svojim znanstvenim talentom i zalaganjem, širokim znanjem i velikom radnom energijom, kroz dugu profesionalnu karijeru, profesor Bilinski dao je znatan znanstveni doprinos, koji gotovo potpuno pripada geometriji. Napisao je više od pedeset radova, a posljednji je objavljen 1995. godine, kada je već navršio 86 godina. Tematski se radovi mogu svrstati u sedam skupina, kao što je učinio B. Pavković pišući u povodu 80. obljetnice života profesora Bilinskoga ([1]):

1. Teorija mreža i poliedara
2. Primjene kinematičko-geometrijskih razmatranja na fizičke geofizičke pojave
3. Elementarna geometrija i primjena ptolemejskih matrica u elementarnoj geometriji
4. Neeuklidska geometrija
5. Diferencijalna i diferencijaska geometrija
6. Linijska geometrija
7. Primjene funkcionalnih jednadžbi i teorije invarijanata na geometrijske probleme

Odmah se vidi da je geometrija znanstvena okosnica i konstanta toga plodnog i vrijednog života. Profesor Bilinski cijenjen je u međunarodnim geometrijskim krugovima, spominjan i navođen u mnogim važnim monografijama. Kako to na znanstvenom području obično biva, njegova je međunarodna prizna-

tost bila veća od one koju mu je iskazivala domaća sredina. Preporuke profesora Bilinskoga otvarale su vrata vrhunskih matematičara, za njega su pitali na svakom geometrijskom skupu, iskazujući poštovanje njegovu radu, pozivali su ga i u poznim godinama na međunarodne znanstvene skupove, a on je odlazio i bio s uvažavanjem slušan i pitan.

Slobodno možemo procijeniti da su osobito važni radovi profesora Bilinskoga iz teorije mreža i poliedara te iz hiperbolične geometrije. U tom je smislu znakovito da njegova prva dva članka, *Odnos kuta paralelnosti i pripadne distance* iz 1941. i *O Eulerovim poliedarskim relacijama* iz 1943., pripadaju upravo tim područjima geometrije.

Doktorska disertacija *Homogene mreže ravnine*, [6], istražuje raznorodne razdiobe (prekrivanja, popločavanja, parketiranja) ravnina, euklidske i neeuklidskih. Aksiomatizacijom i aritmetizacijom problema profesor je Bilinski razvio opću metodu koja se pokazala široko primjenjivom i poticajnom. Čini nam se zanimljivim ovdje navesti sadržaj te disertacije. Nakon opširnog uvoda slijede odjeljci:

1. Jednostavni i složeni ciklički sljedovi
2. Definicija mreže
3. Mreže ravnine. Nužni uvjeti realizacije pravilnih homogenih mreža u ravninama parabolične, sferno-eliptične i hiperbolične geometrije
4. Rješenja relacija nužnih uvjeta pravilnih homogenih mreža ravnine
5. Proširenje valjanosti nužnih uvjeta na općenitije homogene mreže ravnine
6. Orijentacija mreže
7. Čvorišta i poligoni višeg reda odnosno razreda
8. Realizacija mreža ravnine
9. Egzistencija homogenih mreža ravnine
10. Potpuni sistem čvorišta
11. Dokaz egzistencije nekih homogenih mreža ravnine
12. Primjena na posebne slučajeve homogenih mreža ravnina sferne, parabolične, hiperbolične i eliptične geometrije
13. Procesi koji pretvaraju jednu pravilnu homogenu mrežu ravnine u drugu

Disertacija završava crtežima pravilnih homogenih mreža parabolične ravnine, te shematskim crtežima pravilnih homogenih mreža eliptične ravnine.

Kako je razdioba sfere u bitnoj vezi s postojanjem "lijepih" geometrijskih tijela (pravilnih, polupravilnih i drugih), to su rezultati profesora Bilinskog u njegovoj disertaciji istodobno vrijedan prilog teoriji poliedara. Tim se važnim područjem geometrije profesor Bilinski bavio cijeloga života, a njegovi su posljednji radovi ([51], [52], [53], [55], [56]) također o poliedrima.

Najvažniji od tih "poliedarskih" radova zasigurno je onaj pod naslovom *Über die Rhombenisoeder*, objav-

ljen 1960. godine, u kojem se daje do tada nepoznati rompski izoedar, geometrijsko tijelo čije su stranice međusobno sukladni rombovi. Romboedar, tj. paralelepiped omeđen sukladnim rombovima, poznat je od davnine; J. Kepler (1571.-1630.) je otkrio još dva rompska tijela: rompski dodekaedar i rompski triakontaedar. Ruski matematičar E. S. Fedorov (1853.-1919.) našao je četvrto takvo tijelo, rompski ikozaedar, te je bio uvjeren da su time poznati svi rompski izoedri. Međutim, profesor Bilinski našao je peti rompski izoedar i pokazao da osim Keplerova rompskog dodekaedra postoji još jedan, novi, tzv. rompski dodekaedar 2. vrste. Nadalje, dokazao je da daljnji rompski izoedri sigurno ne postoje. Evo što se kaže u sadržaju tog rada:

"Istoplohi poliedri ili »izoedri« češće su bili sistematski istraživani, ali do danas nije teorija ovih poliedara završena. Tako napose nije poznato, da osim već davno poznatog rompskog dodekaedra postoji još jedan, koji je od prvog metrički bitno različit.

Da bi se riješio problem odrediti sve rombske izoedre, promatraju se najprije poliedri jedne šire klase, i to paralelogramski poliedri, kod kojih su sve plohe bilo kakvi paralelogrami. Ovi pripadaju još općenitijoj klasi poliedara, koje je istraživao E. S. Fedorov i nazvao ih »zonoedrima« radi karakterističnog svojstva, da su im plohe raspoređene u »zone«. Za paralelogramske poliedre dokazuje se najprije ovaj teorem:

Ako je p bilo koji prirodni broj veći od 2, tada uvijek postoji bar jedan paralelogramski poliedar sa p zona.

Kontrakcijom ili dilatacijom pojedinih zona moguće je svaki paralelogramski poliedar prevesti u njemu izomorfni rompski poliedar i obrnuto svaki rompski u njemu izomorfni paralelogramski poliedar. Da bi se odredili svi rombski izoedri potrebno je najprije odrediti sve izogonalne sisteme pravaca, t.j. takove skupove pravaca jednog istog snopa, kod kojih svaki pravac sa svakim zatvara isti kut. U trodimenzionalnom prostoru postoje tri potpuna izogonalna sistema pravaca, t.j. takva sistema pravaca, kojima nije moguće dodati još jedan daljnji pravac, a da bi izogonalnost sistema pri tome ostala sačuvana. Na ovim potpuno izogonalnim sistemima zasniva se egzistencija triju porodica rombskih izoedara. U svakoj od tih porodica, pošavši od poliedra s najvećim brojem ploha, svaki daljnji poliedar izlazi iz prethodnoga eliminacijom pojedine zone. Iz danog izlaganja je očito, da su navedeni poliedri svi mogući rombski izoedri, i da sada doista ni jedan daljnji takav poliedar nije moguć..."

Uz ostale radove profesora Bilinskoga koji se bave raznorodnim geometrijskim područjima, zapažen je doprinos geometriji njegov model hiperbolične ravnine u torusnoj ravnini (euklidska ravnina nadopunjena beskonačno dalekom točkom i dvama ide-

alnim pravcima koji se u njoj sijeku; to je homeomorfno torusu), u kojoj točke "glume" pravce, a pravokutne hiperbole točke. U sažetku rada [35] stoji:

"Euklidsku ravninu moguće je na više različitih načina nadopuniti nepravim elementima. Ako se ona upotpuni nepravim elementima tako, da dobije suvislost torusa, nastaje torusna ravnina. U toj anizotropnoj ravnini definira se H-geometrija, za koju se pokazuje, da je izomorfna geometriji hiperbolične ravnine. Osnovni elementi ove H-geometrije jesu orijentirani h-pravci, koji su predočeni onim točkama torusne ravnine, koje leže izvan jednog istaknutog fundamentalnog pravca. Pri tome je h-točka takova istostrana hiperbola, kojoj je fundamentalni pravac imaginarna os. Definiraju se i ostali osnovni pojmovi H-geometrije u torusnoj ravnini, i uvodi metrika u tako definiranu geometriju. ..."

Prije je u [32] dana još jedna interpretacija geometrije hiperbolične ravnine, tada u projektivnoj geometriji pravca, u kojoj eliptična involucija na projektivnom pravcu znači točku hiperbolične ravnine, a hiperbolična involucija na tom pravcu predočuje pravac hiperbolične ravnine. Ako dvostruke točke tih involucija čine harmoničnu četvorku, pripadni su elementi u hiperboličnoj ravnini incidentni.

Problem nepostojanja evolute za određene krivulje hiperbolične ravnine u [21] je riješen definiranjem tzv. ekvidistantoide, kojoj je početna krivulja tzv. bazoida.

Vrlo su vrijedni radovi [27] i [30], u kojima se pokazuje temeljna jednostavnost vrlo važnog stavka o četiri tjemena koji se tu dokazuje za poligone u diferencijskoj geometriji.

O svojim znanstvenim rezultatima profesor je Bilinski izlagao na mnogobrojnim međunarodnim skupovima, simpozijima i kongresima (Amsterdam, Edinburgh, Stockholm, Moskva, Nice, Sofija, Carigrad, Bukurešt, Varna, Weimar, Beč, Graz, Oberwolfach), bio je redoviti sudionik domaćih znanstvenih susreta, te često pozivan na strana i domaća sveučilišta.

Bio je vrstan profesor, odličan predavač i pažljiv poučavatelj, znalački pedagog, kojega je resila očinska blagost i smirenost u obraćanju studentima i kolegama. Studenti su ga cijenili i voljeli, a mnogi od njih i danas predaju matematiku ili fiziku na osnovnim i srednjim školama ili sveučilištima. Zahvaljujući njegovim predavanjima mnogih geometrijskih kolegija bilo je lako zavoljeti i razumjeti geometriju, neke je privukao da se odluče i za znanstveni rad u tom području. Predavao je i na poslijediplomskom studiju, bio mentor većem broju poslijediplomanada, te šestorici doktoranada.

Volio je šalu, ugodno društvo; bio je velik poklonik glazbe i ljubitelj prirode.

Svojim dugim i plodnim znanstvenim, stručnim i nastavničkim radom profesor Bilinski podario je mnogo i mnogima, onima koji su toga svjesni već odav-

no, onima koji će to tek biti, i onima koji to neće ni znati.

Bio je zaljubljenik u geometriju, njezin štovatelj i vrstan znalac, ali također vješt graditelj i uspješan prinositelj.

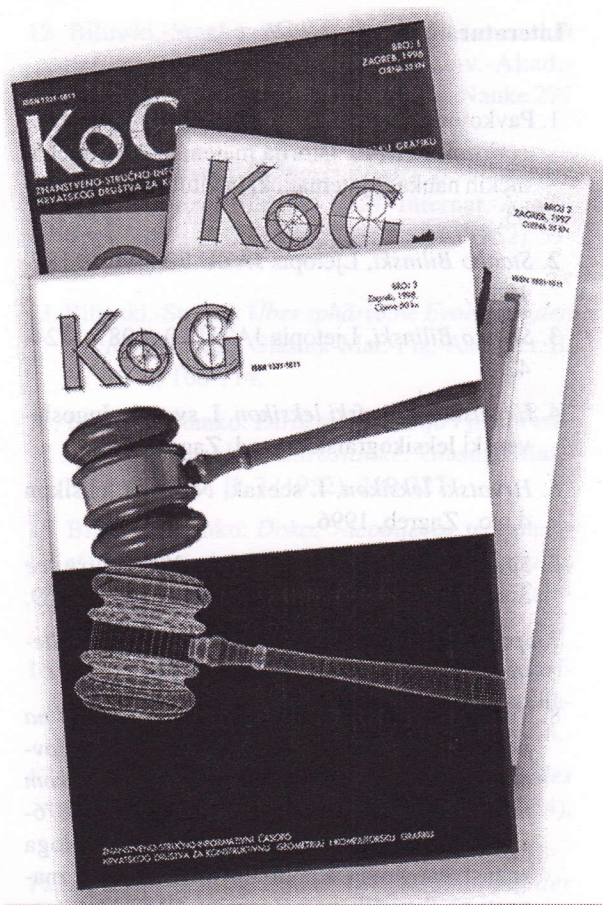
Sjećajući se voljenog profesora i učitelja, cijenjenoga kolege i međunarodno priznatog znanstvenika, dragog prijatelja, te uvijek gospodina, ostajemo mu zahvalni i vjerni onomu o čemu nas je učio, izravno i neizravno, kao matematičar i povrh svega kao čovjek.

Popis objavljenih radova akademika Stanka Bilinskoga

1. Bilinski,-Stanko: *Odnos kuta paralelnosti i pripadne distance*. Nastavni Vjesnik 49 (1940/41), 417-422.
2. Bilinski,-Stanko: *O Eulerovim poliedarskim relacijama*. Nastavni Vjesnik 51 (1942/43), 281-285.
3. Bilinski,-Stanko: *Problem parketiranja*. Matematička čitanka, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1947, 99-106.
4. Bilinski,-Stanko: *O jednadžbi pravca i hiperbole kod Fermata*. Matematička čitanka, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1947, 112-115.
5. Bilinski,-S.; Sevdic,-M.: *Problem jedra*. Matematička čitanka, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1947, 136-140.
6. Bilinski,-Stanko: *Homogene mreže ravnine*. Rad Jugoslav.-Akad.-Znanosti-i-Umjetnosti 271 (1948), 145-255.
Bilinski,-Stanko: *Homogene Netze der Ebene*. Bull.-Internat.-Acad.-Yougoslave.-Cl.-Sci.-Math.-Phys.-Tech. (N.S.) 2, (1949). 63-111
7. Bilinski,-Stanko: *Prilog dinamičkim kumulonimbusa*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. 3 (1948), 29-51.
8. Bilinski,-Stanko: *O kinematičkim uvjetima frontogeneze*. Rad Geofizičkog zavoda u Zagrebu, II Ser. 2 (1948), 5-16.
9. Bilinski,-S.; Blanuša,-D.: *Dokaz nerješivosti jedne mreže*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. 4 (1949), 78-80.
10. Bilinski,-Stanko: *O jednom teoremu G. Mongea*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. 5, (1950). 49-55
11. Bilinski,-Stanko: *Generalizacija jednog Mongeovog teorema*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. 5 (1950), 175-177.

12. Bilinski,-Stanko: *Homogene mreže zatvorenih orijentabilnih ploha*. Rad-Jugoslav.-Akad.-Znan.-Umjet.-Odjel.-Mat.-Fiz.-Tehn.-Nauke 277 (1950), 129-164.
Bilinski,-Stanko: *Homogene Netze geschlossener orientierbarer Flächen*. Bull.-Internat.-Acad.-Yougoslave-Sci.-Beaux-Arts (N.S.) 6 (1952), 59-75.
13. Bilinski,-Stanko: *Über sphärische Evolventoiden der Raumkurven*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. 6 (1951), 106-114.
14. Bilinski,-Stanko: *Diracova funkcija i jedan elementarni problem hidrostatičke*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. 7 (1952), 219-227.
15. Bilinski,-Stanko: *Dokaz Jacobijevog teorema o sfernoj slici glavnih normala zatvorene krivulje*. Srpska-Akad.-Nauka.-Zbornik-Radova-Matematički-Inst. 18(2) (1952), 143-146.
16. Bilinski,-Stanko: *Einige Eigenschaften sphärischer Evoluten und sphärischer Evolventen*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. 9 (1954), 109-114.
17. Bilinski,-Stanko: *Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ptolemaios*. Simon-Stevin 30 (1954), 90-93.
18. Bilinski,-Stanko: *Eine Verallgemeinerung der Formeln von Frenet und eine Isomorphie gewisser Teile der Differentialgeometrie der Raumkurven*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. 10 (1955), 175-180.
19. Bilinski,-Stanko: *O osnovama aksiomatike*. Nastava matematike i fizike 5 (1956), 83-87.
20. Bilinski,-Stanko: *Einige Anwendungen der Polarkoordinaten in der hyperbolischen Geometrie*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. 11 (1956), 25-35.
21. Bilinski,-Stanko: *Über eine gewisse Kurvenzuordnung in der hyperbolischen Ebene*. Comment.-Math.-Helv. 32 (1957), 1-12.
22. Bilinski,-Stanko: *A note on the fundamental equations of the theory of surfaces*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II 13 (1958), 121-124.
23. Bilinski,-Stanko: *Über die Ordnungszahl der Klassen Eulerscher Polyeder*. Arch.-Math. 10 (1959), 180-186.
24. Bilinski,-Stanko: *Hoćemo li studirati matematiku?*. Matematičko-fizički list 10 (1959-60), 115-117.
25. Bilinski,-Stanko: *Ekonomsko i kulturno značenje matematike*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II 15 (1960), 69-72.
26. Bilinski,-Stanko: *Über die Rhombenisoeder*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II 15 (1960), 251-263.
27. Bilinski,-Stanko: *“Der Vierscheitelsatz” für gleichseitige Polygone*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II 16 (1961), 195-201.
28. Bilinski,-Stanko: *Utjecaj otkrića neeuclidiske geometrije na savremani razvoj nauke*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II 16 (1961), 143-146.
29. Bilinski,-Stanko: *Über eine Erweiterungsmöglichkeit der Kurventheorie*. Monatsh.-Math. 67 (1963), 289-304.
30. Bilinski,-Stanko: *Die primitivste Form des Vierscheitelsatzes*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II 18 (1963), 85-93.
31. Bilinski,-Stanko: *Vektoren in der hyperbolischen Ebene*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II 19 (1964), 37-52.
32. Bilinski,-Stanko: *Eine Interpretation der ebenen hyperbolischen Geometrie in der projektiven Geometrie der Geraden*. Glasnik-Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II 20 (1965), 99-135.
33. Bilinski,-Stanko: *Einige Betrachtungen über Koordinatensysteme und Modelle der Lobatschewskischen Geometrie*. Glasnik-Mat.-Ser. III 1 (21) (1966), 177-198.
34. Bilinski,-Stanko: *Einige Betrachtungen über Geradenkoordinaten in der hyperbolischen Ebene*. Glasnik-Mat.-Ser. III 2 (22) (1967), 179-190.
35. Bilinski,-Stanko: *Über ein Modell der zweidimensionalen hyperbolischen Geometrie in der Torusebene*. Glasnik-Mat.-Ser. III 2 (22) (1967), 191-200.
36. Bilinski,-Stanko: *Über einen kurventheoretischen Satz von N. Abramescu*. Glasnik-Mat.-Ser. III 3 (23) (1968), 253-256.
37. Bilinski,-Stanko: *Zur Begründung der elementaren Inhaltslehre in der hyperbolischen Ebene*. Math.-Ann. 180 (1969), 256-268.
38. Bilinski,-Stanko: *Ein analytisches Modell der projektiven Liniengeometrie*. Monatsh.-Math. 74 (1970), 193-210.
39. Bilinski,-Stanko; Horvatić,-Krešo; Mardešić,-Sibe: *Dr. Rajko Draščić (29. VI. 1923.-30. V. 1972)*. Glasnik-Mat.-Ser. III 8(28) (1973), 149-152.
40. Bilinski,-Stanko: *Über Ptolemäische Sätze*. Monatsh.-Math. 77 (1973), 193-205.
41. Bilinski,-Stanko: *Eine Eigenschaft der $(n+2, n)$ -Matrizen und Ptolemäische Funktionen von Dreieckfiguren*. Collection of articles dedicated to Stanislaw Golab on his 70th birthday, II. Demonstratio-Math. 6 (1973), 471-481.
42. Bilinski,-Stanko: *Ein Ptolemäischer Satz für den isotropen Kegel des Minkowskischen Raumes*.

- Mathematical Structures - Computational Mathematics -Mathematical Modelling, Sofija (1975),183-185.
43. Bilinski,-Stanko: *Ein Satz von Brahmagupta und seine Verallgemeinerungen*. Rad-Jugoslav.-Akad.-Znan.-Umjet. 370 (1975), 47-55.
 44. Bilinski,-Stanko: *Die linearadditiven Zweiindizesfunktionen*. Aequationes-Math. 14 (1976), 95-104.
 45. Bilinski,-Stanko: *Ein Symmetriemass von Vierecken der affinen Ebene*. Rad-Jugoslav.-Akad.-Znan.-Umjet. 382 (1978), 109-114.
 46. Bilinski,-Stanko: *Funktionale von primitiven Polygonen Kleinscher Ebenen*. Comment.-Math.-Helv. 54 (1979), no. 2, 288-303.
 47. Bilinski,-Stanko: *Ein Regularitätsmasse von Figuren in Kleinschen Räumen*. Österreich.-Akad.-Wiss.-Math.-Natur.-Kl.-Sitzungsber. II 188 (1979), 167-177.
 48. Bilinski,-Stanko: *Die Invarianten einer diskreten Transformationsgruppe endlicher Ordnung*. Rad-Jugoslav.-Akad.-Znan.-Umjet. 386 (1980), 89-93.
 49. Bilinski,-Stanko: *Die zu einer Gruppe gehörenden Funktionalgleichungen*. Rad-Jugoslav.-Akad.-Znan.-Umjet. 403 (1983), 55-67.
 50. Bilinski,-Stanko: *Zur Charakterisierung des Doppelverhältnisbegriffes durch Funktionalgleichungen*. Rad-Jugoslav.-Akad.-Znan.-Umjet. 403 (1983), 69-75.
 51. Bilinski,-Stanko: *Die quasiregulären Polyeder vom Geschlecht 2*. Österreich.-Akad.-Wiss.-Math.-Natur.-Kl.-Sitzungsber. II 194 (1985), 63-78.
 52. Bilinski,-Stanko: *Die quasiregulären Polyeder zweiter Stufe*. Österreich.-Akad.-Wiss.-Math.-Natur.-Kl.-Sitzungsber. II 196 (1987), 1-12.
 53. Bilinski,-Stanko: *Die windschiefen Archimedischen Polyeder höheren Geschlechtes*. Österreich.-Akad.-Wiss.-Math.-Natur.-Kl.-Sitzungsber. II 197 (1988), 315-326.
 54. Bilinski,-S.: *Vilko Niče (27.01.1902-16.10.1987)*. Glas.-Mat.-Ser. III 24(44) (1989), 227-231.
 55. Bilinski,-Stanko: *Ein Beitrag zur Polyedertheorie der Rhombokuboktaeder-Familie*. Österreich.-Akad.-Wiss.-Math.-Natur.-Kl.-Sitzungsber. II 201 (1992), 117-129.
 56. Bilinski,-S.: *Die Familie der abgestumpften quasiregulären Polyeder*. Österreich.-Akad.-Wiss.-Math.-Natur.-Kl.-Sitzungsber. II 204 (1995), 145-150.
- Literatura / izvori**
1. Pavković, -Boris: *Stanko Bilinski - Povodom 80. godišnjice života*. Istorija matematičkih i mehaničkih nauka (Matematički institut) 4 (1991), 71-83.
 2. *Stanko Bilinski*, Ljetopis JAZU 70 (1965), 185-188
 3. *Stanko Bilinski*, Ljetopis JAZU 70 (1987), 424-425
 4. *Hrvatski biografski leksikon*, I. svezak, Jugoslavenski leksikografski zavod, Zagreb, 1983.
 5. *Hrvatski leksikon*, I. svezak, Naklada leksikon d.o.o., Zagreb, 1996.
 6. *Spomenica u povodu proslave 300-godišnjice Sveučilišta u Zagrebu*, Sveučilište, Zagreb, 1969.
 7. *Spomenica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta 1874 - 1974*, PMF, Zagreb, 1974.
 8. Vučković, -Milenko: *Nastavni i znanstveni rad na području matematičkih znanosti na Mudroslovnom, Filozofskom i Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu u razdoblju 1876-1976*. Stogodišnjica nastave i organiziranoga znanstvenog rada iz područja matematičkih znanosti na Sveučilištu u Zagrebu, PMF-Matematički odjel i Društvo matematičara i fizičara SRH, Zagreb, 1977, 9-51.
 9. *120 godina nastave prirodoslovlja i matematike na Sveučilištu u Zagrebu*, PMF, Zagreb, 1996.
 10. Ivanšić, -I.: *Djelatnost Društva u proteklih 40 godina - matematika*. Glasnik-Mat.-Ser. III 24(44) (1989), 651-653.
 11. Ivanšić, -I.; Mardešić, -S.; Pavković, -B.: *Pedeseta obljetnica Društva*. Glasnik-Mat.-Ser. III 30(50) (1995), 373-384.



Kako nabaviti KoG?

KoG je najjednostavnije nabaviti u uredništvu časopisa.

KoG

Građevinski fakultet

Av. V. Holjevca 15, 10010 Zagreb, Hrvatska

Tel.: 01 670-509,

Fax: 01 66 00 642

E-mail: kog@master.grad.hr

Cijena primjerka je 50 Kn za Hrvatsku.

Ako Vas zanima tematika časopisa i rad naše udruge, preporučamo Vam da postanete članom HDKGIKG (godišnja članarina iznosi 100 KN). Za članove društva časopis je besplatan.

How to get KoG?

The easiest way to get your copy of KoG is by contacting the editor's office.

KoG

Faculty of Civil Engineering

Av. V. Holjevca 15, 10010 Zagreb, Croatia

Tel.: (385 1) 670-509,

Fax: (385 1) 66 00 642

E-mail: kog@master.grad.hr

The price of the issue is \$10 + mailing expenses \$5 for European countries and \$10 for other parts of the world.

U izdanju Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu objavljene su knjige *Crtež u znanosti* i *Knjiga sažetaka* svih predavanja i postera znanstvenog skupa održanog 16-17. listopada 1998. u Zagrebu.

Knjiga *Crtež u znanosti* je formata 22 x 27 cm, obuhvaća 300 stranica s 200 ilustracija, nosi oznaku ISBN 953-6082-03-9 i stoji 199 kuna.

Knjiga sažetaka je formata 22 x 27 cm, obuhvaća 60 stranica, nosi oznaku ISBN 953-6082-04-7 i stoji 49 kuna.

Obje se knjige po navedenoj cijeni (na koju se ne plaća PDV) mogu naručiti pouzecom, ili uplatom na žiro-račun Geodetskog fakulteta broj 30102-603-3210.

Za sve informacije izvolite se obratiti na adresu:

Doc. dr. sc. Miljenko Lapaine

Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb,

tel.: 45 61 273, faks: 48 28 081; e-mail: mlapaine@public.srce.hr

Two books *Drawing in Science* and *Abstracts* of all lectures and poster presentations of the symposium held in October 1998 in Zagreb have been published by the Faculty of Geodesy, University of Zagreb.

Drawing in Science is 22 x 27 cm in size, includes 300 pages with 200 illustrations, ISBN 953-6082-03-9, USD 40 plus postage.

Abstracts is 22 x 27 cm in size, includes 60 pages, ISBN 953-6082-04-7, USD 10 plus postage.

For all information please contact

Dr. Miljenko Lapaine,

University of Zagreb, Faculty of Geodesy, Kačićeva 26
10000 Zagreb, Croatia

tel.: 385 1 45 61 273, fax: 385 1 48 28 081

e-mail: mlapaine@public.srce.hr



Original scientific paper

Accepted 20. 5. 1998.

ZDRAVKA BOŽIKOV

On Symmetric Designs with Parameters (101, 25, 6)

On Symmetric Designs with Parameters (101, 25, 6)

ABSTRACT

There is known only one symmetric design with parameters (101, 25, 6) which has a Singer group (see [3]). Consequently, it is of interest to try to construct such a design without a Singer group.

Key words: symmetric design, automorphism, Frobenius group, orbit structure

O simetričnim dizajnama s parametrima (101, 25, 6)

SAŽETAK

Poznat je samo jedan simetrični dizajn s parametrima (101, 25, 6) koji ima Singerovu grupu (vidi [3]). U ovom radu pokušavamo konstruirati takav dizajn bez Singerove grupe.

Ključne riječi: simetrični dizajn, automorfizam, Frobeniusova grupa, orbitna struktura

The symmetric design with parameters (v, k, λ) is the finite incidence structure D which has v points and v lines (blocks) so that every line of D is incident with k points of D , every point of D lies on k lines of D , every two lines of D intersect in λ points of D , every two points of D are incident with λ lines of D . Much more about symmetric designs see [1].

In this paper we assume that the Frobenius group $E_{25} \cdot Z_3$ of order 75 acts on such a design in five orbits of lengths 1, 25, 25, 25, 25. Thus, we assume that Z_3 has five fixed points. However we prove the following:

Theorem.

There is no symmetric design with parameters (101, 25, 6) acted upon by the Frobenius group $G = E_{25} \cdot Z_3$ (a faithful extension of an elementary abelian group E_{25} of order 25 by a cyclic group Z_3 of order 3) so that Z_3 has exactly five fixed points.

Proof. Let D be a symmetric design with parameters (101, 25, 6) on which the Frobenius group $G = E_{25} \cdot Z_3$ operates, where G is given (without loss of generality) by:

$$G = \langle a, b, c / a^5 = 1, b^5 = 1, c^3 = 1, \\ aba^4b^4 = 1, c^2acb^4 = 1, c^2bcab = 1 \rangle.$$

For a reduction of a number of cases we will use the non-abelian group G_{16} of order 16, where

$$G_{16} = \langle d, e / d^8 = 1, e^2 = 1, eded^3 = 1 \rangle,$$

which normalizes the Frobenius group $G = \langle a, b, c \rangle$ so that the following relations

$$dcd^7c^2 = 1; \quad d^7adab^2 = 1; \quad (ec)^2 = 1; \quad eaea^4 = 1$$

are satisfied.

The normalizer G_{16} of the group G is counted in a full automorphism group ($Aut G$) of G .

We see that there is a unique orbit structure M for E_{25} (in the sense of [2]), which admits the action of Z_3 , i. e. where all coefficients are $\equiv 0$ or $1 \pmod{3}$. We got it "easily" and we checked the result with the help of a computer. So we have:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 9 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 6 & 4 & 9 \\ 0 & 6 & 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

This orbit structure M has an automorphism (a symmetry) ξ of order 3, which permutes cyclically the last three columns and rows in M . We also use this symmetry ξ for a reduction.

The complete group $G = E_{25} \cdot Z_3$ has one fixed point, which we will denote with ∞ , and the other point-orbits of length 25 will be denoted by 1, 2, 3, 4.

We shall denote the points of our design D with $\infty, I_1, I_2, \dots, I_{25}$, $I \in \{1, 2, 3, 4\}$ and the automorphisms will be:

$$a = (\infty)(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)(I_6, I_{10}, I_{11}, I_{12}, I_{13})(I_7, I_{16}, I_{22}, I_{25}, I_{20}) \\ (I_8, I_{17}, I_{23}, I_{24}, I_{15})(I_9, I_{18}, I_{19}, I_{21}, I_{14}), \\ b = (\infty)(I_1, I_6, I_7, I_8, I_9)(I_2, I_{10}, I_{16}, I_{17}, I_{18})(I_3, I_{11}, I_{22}, I_{23}, I_{19}) \\ (I_4, I_{12}, I_{25}, I_{24}, I_{21})(I_5, I_{13}, I_{20}, I_{15}, I_{14}), \\ c = (\infty)(I_1)(I_2, I_6, I_{14})(I_3, I_7, I_{24})(I_4, I_8, I_{22})(I_5, I_9, I_{10})(I_{11}, I_{13}, I_{15}) \\ (I_{12}, I_{20}, I_{25})(I_{16}, I_{21}, I_{18})(I_{17}, I_{23}, I_{19}), \text{ where } I \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

For a reduction we use the following collineations :

$$d = (\infty)(I_1)(I_2, I_{15}, I_3, I_{12}, I_5, I_{16}, I_4, I_{19})(I_6, I_{11}, I_7, I_{20}, I_9, I_{21}, I_8, I_{17}) \\ (I_{10}, I_{18}, I_{22}, I_{23}, I_{14}, I_{13}, I_{24}, I_{25}), \\ e = (\infty)(I_1)(I_2)(I_3)(I_4)(I_5)(I_6, I_{14})(I_7, I_{24})(I_8, I_{22})(I_9, I_{10})(I_{11}, I_{18}) \\ (I_{12}, I_{19})(I_{13}, I_{21})(I_{15}, I_{16})(I_{17}, I_{25})(I_{20}, I_{23}), \\ \text{where } I \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

We got the automorphisms a, b, c and d, e in the explicit form with the help of Hrabec de Angelis's programme for "coset enumeration".

The block ℓ_0 is $G = \langle a, b, c \rangle$ -invariant and is uniquely determined:

$$\ell_0 = 1_1 1_2 1_3 \dots 1_{23} 1_{24} 1_{25}.$$

In the next construction we denote with $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ the $\langle c \rangle$ -invariant representatives of E_{25} -orbits of blocks. The block ℓ_1 contains the point ∞ , and six points from each of the orbits 1, 2, 3, 4.

With the help of a computer we got the following 28 possibilities for the choice of the first six points of orbit 1:

$$\ell_1 = \infty \dots \{ (2, 6, 14, 3, 7, 24)^*, (2, 6, 14, 4, 8, 22), (2, 6, 14, 5, 9, 10)^*, \\ (2, 6, 14, 11, 13, 15)^*, (2, 6, 14, 12, 20, 25), (2, 6, 14, 16, 21, 18), \\ (2, 6, 14, 17, 23, 19), (3, 7, 24, 4, 8, 22), (3, 7, 24, 5, 9, 10), \\ (3, 7, 24, 11, 13, 15), (3, 7, 24, 12, 20, 25), (3, 7, 24, 16, 21, 18), \\ (3, 7, 24, 17, 23, 19), (4, 8, 22, 5, 9, 10), (4, 8, 22, 11, 13, 15), \\ (4, 8, 22, 12, 20, 25), (4, 8, 22, 16, 21, 18), (4, 8, 22, 17, 23, 19), \\ (5, 9, 10, 11, 13, 15), (5, 9, 10, 12, 20, 25), \\ (5, 9, 10, 16, 21, 18), (5, 9, 10, 17, 23, 19), \\ (11, 13, 15, 12, 20, 25), (11, 13, 15, 16, 21, 18), \\ (11, 13, 15, 17, 23, 19), (12, 20, 25, 16, 21, 18), \\ (12, 20, 25, 17, 23, 19), (16, 21, 18, 17, 23, 19) \}.$$

After the reduction with the help of group $G_{16} = \langle d, e \rangle$ only three possibilities remain (signed with *). On the orbits 2, 3, 4 the symmetry ξ is used for a reduction. Thus, with the help of a computer, we get 444 solutions for the block ℓ_1 .

The block ℓ_2 has six points from each of the orbits 1 and 3, nine points from the orbit 2, and four points from the orbit 4. With the help of a computer we get 58 solutions for ℓ_2 which are compatible with ℓ_1 .

The block ℓ_3 has six points from each of the orbits 1 and 2, four points from the orbit 3, and nine points from the orbit 4. Again with the help of a computer we see that there is no solution for ℓ_3 , which is compatible with orbits containing 25 blocks, whose representatives are ℓ_1 and ℓ_2 .

This proves our Theorem.

Remark. It remains to investigate the more complicated problem of a construction of this design with the help of the group $G = E_{25} \cdot Z_3$, where Z_3 has only two fixed points. In this case the group G acts on such a design in three orbits of lengths 1, 25, 75. However, presently this cannot be done with a computer.

References

- [1] BETH, T.; JUNGnickEL, D.; LENZ, H.: *Design theory*, B. I. Mannheim, 1985
- [2] JANKO, Z.: Coset Enumeration in Groups and Construction of Symmetric Designs, *Combinatorics* **90** (1992), 275–277
- [3] MATHON, R.; ROSA, A.: Tables of Parameters of BIBD's with $r \leq 41$ Including Existence, Enumeration, and Resolvability Results: An update, *Ars Combin.* **30** (1990), 65–96

Dr. sc. Zdravka Božikov
 Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu
 Matice hrvatske 15
 21 000 Split, R. Hrvatska
 tel. +385-(0)21-303-321
 fax. +385-(0)21-524-162
 e-mail: bozikov@cigla.gradst.hr

Original scientific paper

Accepted 21. 10. 1998.

MÁRTA SZILVÁSI-NAGY*

Closing Pipes by Extension of B-Spline Surfaces

Dedicated to the memory of Professor Stanko Bilinski

Zatvaranje cijevi proširenjem B-spline ploha

SAŽETAK

U radu je prikazan algoritam za zatvaranje cijevi reprezentiranih tenzorskim produktom B-spline ploha. Plohe u obliku cijevi proširuju se i zatvaraju pravokutnim dijelovima (trostranim). Geometrijski podaci dijela koji zatvara su zajednički singularni vrh novih rubnih dijelova i rubni uvjeti prvog reda na tom vrhu. Tada se točke proširenja kontrolne mreže računaju iz tih podataka. Korisnički unos algoritma je, osim cijevi, singularna točka zatvaranja. Rubni se uvjeti biraju automatski, a da bi se postigao glatki oblik dijela koji zatvara oni se djelomično računaju i iz uvjeta zaglađivanja. Što više, točka zatvaranja također se može izračunati iz uvjeta zaglađivanja što vodi do automatskog zatvaranja cijevi.

Cljučne riječi: CAGD, B-spline plohe, zaglađivanje

Closing Pipes by Extension of B-Spline Surfaces

ABSTRACT

This paper presents an algorithm to close pipes represented as tensor product B-spline surfaces. The tube shaped surface will be extended and closed by degenerate rectangular (three-sided) patches. The geometric data of the closing part are the common singular vertex of the new bordering patches and first order boundary conditions at this vertex. Then the points of the extension of the control net are computed from these data. The user input of the algorithm, besides the pipe, is the single closing point. The boundary conditions are chosen automatically and, in order to achieve a fair shape of the closing part, are partly computed from a fairness condition. Moreover, also the closing point can be computed from the fairness condition, which leads to the automatic closing of the pipe.

Key words: CAGD, B-spline surface, fairing

1 Introduction

Pipes, that is tube shaped surfaces, occur frequently in design processes. Such surfaces are, for example, a handle, a bottle, a telephone receiver, etc. From the geometric viewpoint any rotational surface with full parallel circles and any swept surface with closed generator curves is a pipe. Since the modelling systems do not allow in general to specify a single point as a closed sectional curve, in order to get a closed end of a pipe a new surface has to be constructed and fitted to the pipe. It may also happen that the exact shape of the covering part at the end of a tube is not prescribed, it simply has to be smooth and fit correctly. For the solution of this modelling problem we present an algorithm developed for tensor product B-spline surfaces of degrees (3,2). The tube shaped surface will be extended and closed by degenerate rectangular (three-sided) patches. The user inputs of the algorithm are the closing point, which is the common singular vertex of the three-sided patches and, if required, the position of the

tangent plane or the tangent direction of the longitudinal boundary curves at this point. The remaining data, which are necessary for the equations of the new patches will be computed from a fairness condition. We will also show an automatic closing of the pipe, where even the position of the closing point is computed from a fairness condition.

The tensor product B-spline surface is determined by $n \times m$ control points and by the B-spline basis functions of 3rd and 2nd degree over the periodic knot vectors $\{t\}_{-2}^{n+3}$ and $\{s\}_{-1}^{m+2}$, respectively. We assume that the (i, j) th patch of the tube shaped surface is given by a parametric vector equation in the following matrix form

$$\mathbf{r}_{i,j}(u, v) = [1 \ u \ u^2 \ u^3] \mathbf{B}_i^{(3)}(t) [\mathbf{V}_{i,j}] \mathbf{B}_j^{(2)}(s)^T [1 \ v \ v^2]^T, \quad (1)$$

$$(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad i = 1, \dots, n-3, \quad j = 1, \dots, m-2,$$

* Supported by the Hungarian Nat. Found. for Sci. Research (OTKA), No. T 020498

where

$$[\mathbf{B}_i^{(3)}(t)] = \begin{bmatrix} b_{11} & (1-b_{11}-b_{13}) & b_{13} & 0 \\ -3b_{11} & 3b_{11}-b_{23} & b_{23} & 0 \\ 3b_{11} & -(3b_{11}+b_{33}) & b_{33} & 0 \\ -b_{11} & b_{11}-b_{43}-b_{44} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix},$$

$$b_{11} = \frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_{i-2})},$$

$$b_{13} = \frac{(t_i-t_{i-1})^2}{(t_{i+2}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_{i-1})},$$

$$b_{23} = \frac{3(t_{i+1}-t_i)(t_i-t_{i-1})}{(t_{i+2}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_{i-1})},$$

$$b_{33} = \frac{3(t_{i+1}-t_i)^2}{(t_{i+2}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_{i-1})},$$

$$b_{43} = -\left\{ \frac{1}{3}b_{33} + b_{44} + \frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+2}-t_{i-1})} \right\},$$

$$b_{44} = \frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{(t_{i+3}-t_i)(t_{i+2}-t_i)}$$

is the coefficient matrix [1] of the i th non-uniform cubic B-spline basis function determined by the given knot vector

$$t_{-2} \leq \dots \leq t_{n+3}.$$

The first parameter of the patch is

$$u = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Denoting the elements of the matrix $[\mathbf{B}_j^{(2)}(s)]$ by b again,

$$[\mathbf{B}_j^{(2)}(s)] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ -2b_{11} & 2b_{11} & 0 \\ b_{11} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

$$b_{11} = \frac{s_{j+1}-s_j}{s_{j+1}-s_{j-1}},$$

$$b_{12} = \frac{s_j-s_{j-1}}{s_{j+1}-s_{j-1}},$$

$$b_{32} = -(s_{j+1}-s_j) \left(\frac{1}{s_{j+1}-s_{j-1}} + \frac{1}{s_{j+2}-s_j} \right),$$

$$b_{33} = \frac{s_{j+1}-s_j}{s_{j+2}-s_j},$$

is the coefficient matrix of the j th quadratic B-spline basis function determined by the given knot vector

$$s_{-1} \leq \dots \leq s_{m+2}.$$

The second parameter of the patch is

$$v = \frac{s-s_j}{s_{j+1}-s_j}, \quad s \in [s_j, s_{j+1}].$$

In the expressions of the coefficient matrices we accept the convention $\frac{0}{0} = 0$.

The matrix

$$[\mathbf{V}_{i,j}] = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{i,j} & \mathbf{V}_{i,j+1} & \mathbf{V}_{i,j+2} \\ \mathbf{V}_{i+1,j} & \mathbf{V}_{i+1,j+1} & \mathbf{V}_{i+1,j+2} \\ \mathbf{V}_{i+2,j} & \mathbf{V}_{i+2,j+1} & \mathbf{V}_{i+2,j+2} \\ \mathbf{V}_{i+3,j} & \mathbf{V}_{i+3,j+1} & \mathbf{V}_{i+3,j+2} \end{bmatrix},$$

$$i = 1, \dots, n-3, \quad j = 1, \dots, m-2$$

is built from the control points $\mathbf{V}_{k,l}$ ($k = i, \dots, i+3$, $l = j, \dots, j+2$) of the (i,j) th patch.

If for the control points

$$\mathbf{V}_{i,m-1} = \mathbf{V}_{i,1}, \quad \mathbf{V}_{i,m} = \mathbf{V}_{i,2} \quad (i = 1, \dots, n)$$

hold, then the $(n-3) \times (m-2)$ patches form a tubular surface. The longitudinal u -parameter lines of the surface are cubic, the v -parameter lines in the cross directions are closed quadratic curves. These parameter lines are C^2 and C^1 continuous functions, respectively, if there are no coinciding knot values or control points [2].

By assumption, the knot vectors will be periodical in our representation, so that

$$t_{-2} < \dots < t_2 \leq \dots \leq t_{n-2} < \dots < t_{n+3}$$

and

$$s_{-1} < s_2 < \dots < s_{m+2}.$$

A usual choice of the knot values is the 'chord-length' parametrization, when the knot values are placed according to

$$t_{i+1}-t_i = \overline{\mathbf{V}_{i,*}, \mathbf{V}_{i+1,*}} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

and

$$s_{j+1}-s_j = \overline{\mathbf{V}_{*,j}, \mathbf{V}_{*,j+1}} \quad (j = 1, \dots, m-1).$$

Here the meaning of $*$ in the index is that the average of the corresponding distances or the distances in a 'typical' point sequence in the longitudinal and cross direction of the control net are considered. As the knot vector is longer than a longitudinal control point sequence, the remaining knot values at both ends are placed in equal distances. In the cross direction the equalities $s_m - s_{m-1} = s_2 - s_1$ and $s_{m+1} - s_m = s_3 - s_2$ are assumed.

2 Definition of the closing part

For defining a closing part at the starting borderline $i = 1, j = 1, \dots, m-2$ we specify the closing point \mathbf{P} and generate two additional rows of patches. For this purpose we extend the control net by $2 \times m$ control points $\mathbf{V}_{1,j}$, $\mathbf{V}_{2,j}$ ($j = 1, \dots, m$), and reindex the former control points to $\mathbf{V}_{i+2,j}$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$). The closing part of the pipe will be a C^2 -continuous extension of the original

surface in the (longitudinal) u -direction, if there are no coinciding control points or knot values along the connection line. The new control points will be determined from the point \mathbf{P} and geometric criteria prescribed at the new end of the pipe. The chosen geometric conditions ensure that the boundary patches meet at the given point \mathbf{P} , and their longitudinal boundary lines end up there with prescribed tangent vectors. We shall show that the control points of the extension are uniquely determined by suitable conditions.

Theorem.

Six control vertices $\mathbf{w}_{i,j}$ ($i = 1, \dots, 2, j = 1, \dots, 3$) of the control net $\mathbf{w}_{i,j}$ ($i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 3$) determining a tensor product B-spline patch of degrees (3,2) over the rectangular domain $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ are uniquely determined by the following boundary data: the endpoints ($u = 0$) of the cubic boundary curves $v = 0$ and $v = 1$, the tangent vectors of the same curves at the given endpoints, the cross directional tangent vector of the boundary curve $u = 0$ at the corner point $(u, v) = (0, 0)$ and the twist vector at the same corner point.

Proof. Denote a single bordering patch $\mathbf{r}_{1,j}$ ($j = 1, \dots, m - 2$) by $\mathbf{R}(u, v)$ and its control points by $\mathbf{w}_{i,j}$ ($i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 3$). In order to make the description of the formulae simpler, we assume uniform parametrization, i. e. $t_i = i$ and $s_j = j$. In this case the coefficient matrices of the periodic B-spline functions are constant, and the parametric equation of a patch has the following form

$$\mathbf{R}(u, v) = [1 \ u \ u^2 \ u^3] [\mathbf{B}^{(3)}] [\mathbf{W}] [\mathbf{B}^{(2)}]^T [1 \ v \ v^2]^T, \quad (2)$$

$$(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

where

$$\mathbf{B}_i^{(3)}(t) = \mathbf{B}^{(3)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j^{(2)}(s) = \mathbf{B}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{11} & \mathbf{w}_{12} & \mathbf{w}_{13} \\ \mathbf{w}_{21} & \mathbf{w}_{22} & \mathbf{w}_{23} \\ \mathbf{w}_{31} & \mathbf{w}_{32} & \mathbf{w}_{33} \\ \mathbf{w}_{41} & \mathbf{w}_{42} & \mathbf{w}_{43} \end{bmatrix}.$$

In this equation the six control vertices $\mathbf{w}_{1,j}$, $\mathbf{w}_{2,j}$ ($j = 1, \dots, 3$) of the extension are unknown.

The usual technique to force a curve or a surface through a given point is to specify the point as a multiple control point with the multiplicity $d + 1$ ($d = \text{degree}$) or to raise the multiplicity of the corresponding knot value accordingly. In this case the curve or the surface and also the derivatives are uniquely determined and no freedom is left for the

shape control. In our representation the knot vectors are periodic and the multiplicity of the control vertices equals one, which enables us to prescribe additional boundary conditions besides the interpolation point \mathbf{P} .

The assumptions that the boundary lines $\mathbf{R}(u, 0)$ and $\mathbf{R}(u, 1)$ end at the closing point \mathbf{P} with the tangents \mathbf{T}_0 and \mathbf{T}_1 , respectively, are expressed by the equations

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}(0, 0), \quad (3)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}(0, 1), \quad (4)$$

$$\mathbf{T}_0 = \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{R}(u, v) \Big|_{u=0, v=0}, \quad (5)$$

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{R}(u, v) \Big|_{u=0, v=1}. \quad (6)$$

The assumption that the boundary line $u = 0$ shrinks to the point \mathbf{P} implies that the patch degenerates into a triangular one, therefore we require that the vectors

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{R}(u, v) \Big|_{u=0, v=0}, \quad (7)$$

$$\mathbf{T}_{uv} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{R}(u, v) \Big|_{u=0, v=0} \quad (8)$$

will be set to zero.

In the equations (3)–(8) the vectors on the left hand sides are prescribed and the expressions on the right hand sides are linear in the control vertices. These expressions are easy to compute from equation (2). The unknown control vertices can be determined from the system of vector equations (3)–(8), and we get the following solution:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{11} &= -2\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{uv} + \mathbf{w}_{31}, \\ \mathbf{w}_{12} &= -2\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_{uv} + \mathbf{w}_{32}, \\ \mathbf{w}_{13} &= -4\mathbf{T}_1 + 2\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{uv} + \mathbf{w}_{33}, \\ \mathbf{w}_{21} &= \frac{1}{4}(6\mathbf{P} + 2\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_{uv} - 3\mathbf{T}_v - 2\mathbf{w}_{31}), \\ \mathbf{w}_{22} &= \frac{1}{4}(6\mathbf{P} + 2\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{uv} + 3\mathbf{T}_v - 2\mathbf{w}_{32}), \\ \mathbf{w}_{23} &= \frac{1}{4}(6\mathbf{P} + 4\mathbf{T}_1 - 2\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_{uv} - 3\mathbf{T}_v - 2\mathbf{w}_{33}). \end{aligned} \quad (9)$$

These control points are uniquely determined by the prescribed boundary conditions and are called phantom points or pseudo vertices [4]. QED

The first extension of the method of control points to boundary control of surfaces is given in [5].

While generating the closing part of the pipe the control net of the boundary patches slide around in the (cross-sectional) v -direction for $j = 1, \dots, m - 2$. Although the phantom points \mathbf{w}_{i1} and \mathbf{w}_{i2} overwrite the phantom points \mathbf{w}_{i2} and \mathbf{w}_{i3} ($i = 1, 2$) of the preceding neighbouring patch, we shall show through the examples below that starting with coplanar tangent vectors $\mathbf{T}_{0,j}$ and $\mathbf{T}_{1,j}$, ($j = 1, \dots, m - 2$), all the tangent vectors of the longitudinal u -parameter lines of the degenerate closing patches will lie in this plane, which is the tangent plane at the closing point \mathbf{P} . Moreover, the boundary line $u = 0$ shrinks to the point \mathbf{P} with the tangent vector $\mathbf{T}_v \equiv \mathbf{0}$.

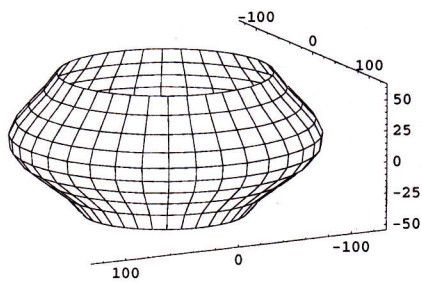


Fig. 1: Pipe

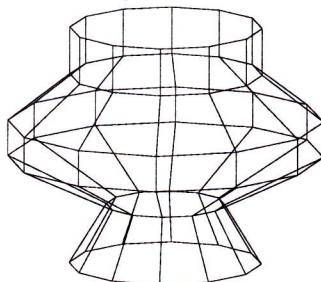


Fig. 2: Control net of the pipe

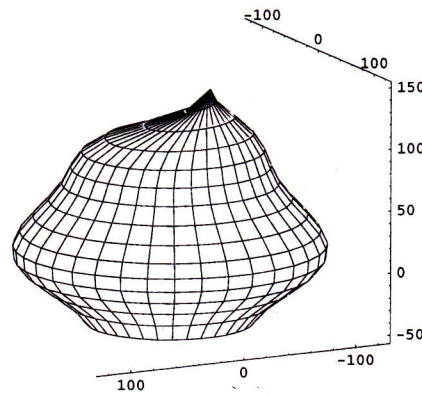


Fig. 3: Closing with fairing

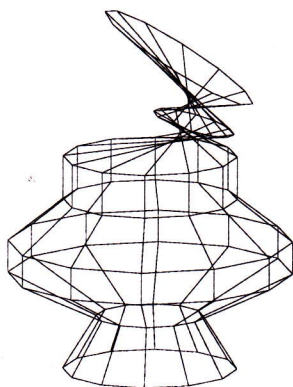


Fig. 4: Control net of the surface in Fig. 3

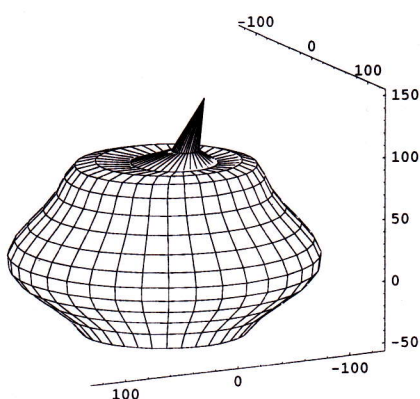


Fig. 5: Closing with a fixed common tangent

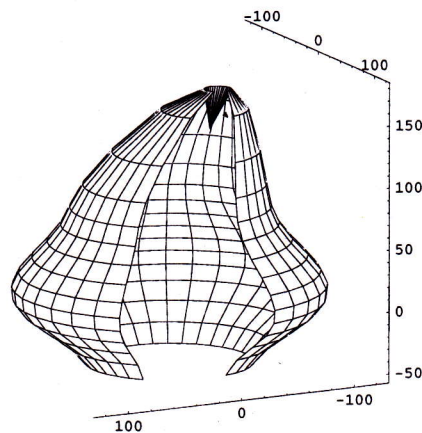


Fig. 6: Closing with reversed tangent

3 Examples

In the following examples the boundary data in (3)–(6) are user inputs, the derivatives in (7) and (8) are chosen to be zero. The closing parts of a given pipe are generated by the phantom points (9) obtained as the solution of the system of vector equations (3)–(8). Three surfaces are illustrated in Figures (3)–(6), which are generated in this way from the tube shown in Figure 1 determined by the control net shown in Figure 2. The tube is composed of 3×12 patches, each represented by 3×3 facets determined by 4×4 parameter lines. At the upper end of the tube a row of 12 rectangular and a row of 12 degenerate patches are computed from the same boundary data, the closing point P , the vector $T_u = T_0 = T_1$ determining the tangent direction of the longitudinal parameter lines at P and the null vector for the initial value of T_v and T_{uv} . In order to generate a non symmetric solution, the point P does not lie on the rotational axis of the pipe and the given direction is not parallel to the axis. The three closings differ in the magnitude and orientation of T_u . In the first solution (Fig. 3) the magnitude of T_u is computed from a fairness condition for each bordering patch separately (see later). In the second solution (Fig. 5)

the vector T_u is twice as long as the average in the first one. In the third example (Fig. 6) the prescribed tangent vector T_u is oriented in the reversed direction and has the same length as in the second example. Here two stripes of patches are not drawn in order to make the inwards turned peak P visible. The angular effect in the projections of the surfaces is due to the small number of the parameter lines.

The three examples illustrate the shaping effect of the orientation and magnitude of the boundary data $T_u = T_0 = T_1$. The length of a tangent vector depends on the parametrization of the surface, which is hidden for the user. As it may cause non desired shaping effects, should be determined by the algorithm and not by the user. A well proved method for the solution of this problem is to compute the vector magnitudes from a fairness condition [6].

4 Fairing

We consider the magnitudes of the tangent vectors T_0 and T_1 of the longitudinal parameter lines at the closing point P as scalar parameters, and write λT_0 and μT_1 in the equa-

tions (9) instead of T_0 and T_1 , respectively. Then we compute the values of λ and μ from a fairness condition in order to achieve a satisfactorily smooth shape. This condition is that λ and μ have their values where an appropriate fairness functional is minimal.

A frequently used fairness functional is the area integral

$$A(\lambda, \mu) = \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbf{R}(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{R}(u, v) \right)^2 \right] dudv, \quad (10)$$

which approximates the energy function of a thin elastic plate [3]. This fairness functional has the advantage to be quadratic in the variables λ and μ , what keeps the optimization process simple.

As the phantom points of the closing patch $\mathbf{R}(u, v) \equiv \mathbf{r}_{1,j}(u, v)$ ($j = 1, \dots, m - 2$) influence also the neighbouring patch $\mathbf{r}_{2,j}(u, v)$, we summarize the area integral for these two patches in each step, and consider the following fairness functional:

$$F_j(\lambda, \mu) = \sum_{i=1,2} \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbf{r}_{i,j}(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{r}_{i,j}(u, v) \right)^2 \right] dudv \quad (11)$$

for the j th stripe while moving around the borderline of the pipe. If the functional F_j has a local minimum, then there

$$\frac{\partial F_j}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial F_j}{\partial \mu} = 0, \quad (12)$$

which is a system of linear equations for λ and μ . It can be verified numerically that the solution of this system of equations is a local minimum of F_j .

Then we substitute λ and μ computed in this way into the equations (9) in order to compute the control net of the closing patch $\mathbf{r}_{1,j}(u, v)$.

We can observe in the following examples that the calculated surfaces have a round, smooth shape and satisfy the prescribed boundary conditions.

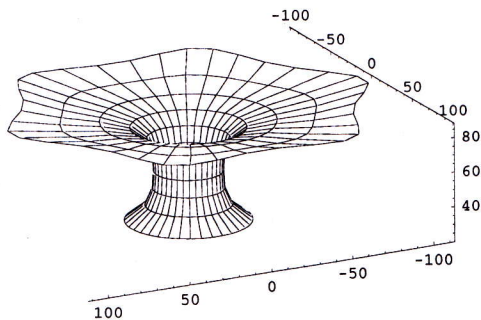


Fig. 7: Pipe

The given pipe is composed of 3×12 patches and is rotational symmetric in 6th order (Fig. 7). The closing point P is given on the rotational axis and the vectors T_0 and T_1 are orthogonal to the axis at P . These vectors are generated for each closing patch by projecting the longitudinal tangent vectors of the given pipe at the corresponding points of the borderline onto the plane orthogonal to the rotational

axis. The tangent plane of the closing part is prescribed by the 12 vectors T_0 at the closing point in this way. Then we determine the magnitudes of these vectors by solving the system of the equations (12), and compute the control points of the extension by (9). The patches of the generated closing part (Fig. 8) have a collapsed edge at P with identically zero tangent vector T_v . The tangent vectors of the longitudinal u -parameter lines at P are all coplanar lying in the prescribed tangent plane. The smooth round shape of the closing part can be seen in the front view (Fig. 9).

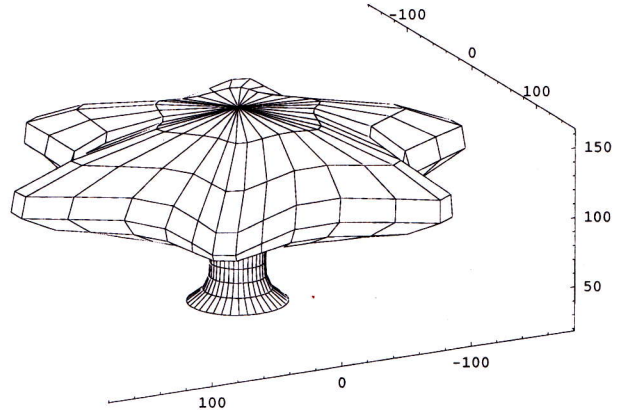


Fig. 8: Closing with fairing

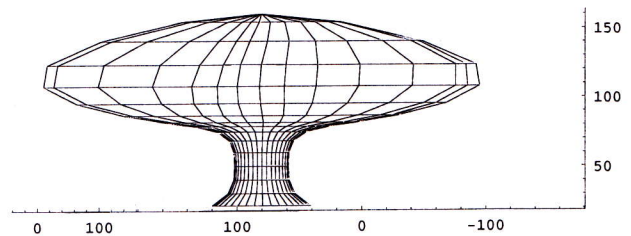


Fig. 9: Front view

This example, the solution in Figure 3 and several other generated surfaces show that the closing algorithm with the chosen fairing condition generates well shaped smooth surfaces. Other surface generation techniques have some disadvantages. The effect of multiple control points is shown in the next example (Fig. 10). This closing is generated without fairing with null vectors T_0 at the closing point P . The assumption $\lambda = \mu = 0$ implies that $w_{1,j} = w_{2,j}$ ($j = 1, \dots, m - 2$), and the surface has a slightly peaked shape (Fig. 11).

The fairing process presented above leads to automatic generation of the closing part if the closing point P is supposed to be moving, and its coordinates are considered as variables of the fairness functional. In the example shown in Figure 12 the lower end of the same pipe (Fig. 7) is closed in this way. The automatic closing of the first pipe (Fig. 1) is shown in Figure 13. In these examples the tangent plane at the closing point is orthogonal to the rotational axis of the

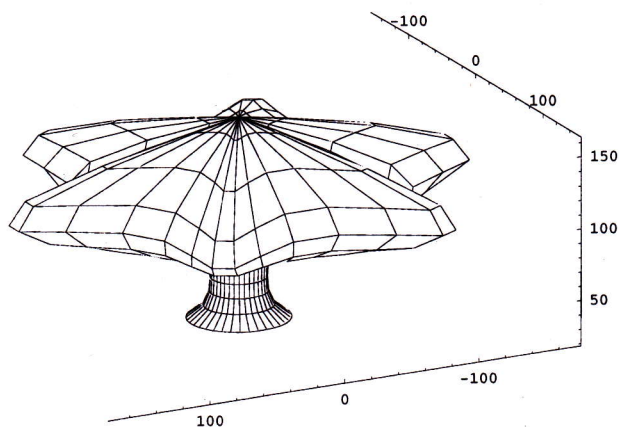


Fig. 10: Closing with null tangent vectors

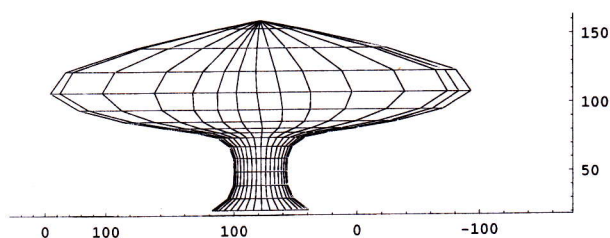


Fig. 11: Front view

pipe. The prescribed tangent directions are then constructed in radial directions in this plane. The closing point is supposed to be moving along the axis. Its distance h from a fixed point of the axis is considered as a variable of the fairness functional. Then the minimization of $F(\lambda, \mu, h)$ gives a solution for the position of the closing point and for the unknown control points as well. In this case no user inputs are required.

Remark. The fairness functional

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}(u, v)}{\partial u^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}(u, v)}{\partial u \partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}(u, v)}{\partial v^2} \right)^2 \right] du dv \quad (13)$$

has been also used in the fairness condition, and its effect has been compared with that of the functional in (10). Though there are differences in the numerical solutions, no differences can be observed on the generated surfaces. Therefore, those examples are not illustrated.

5 About the curvature entities

Consider a three-sided patch $\mathbf{R}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ of the generated closing part presented in a local coordinate system, the origin of which is in the singular vertex $\mathbf{P}(u = 0, v \in [0, 1])$ and the x, y axes lie in the tangent plane at this vertex (Fig. 14). Though the normal vector of this tangent plane is the null vector due to

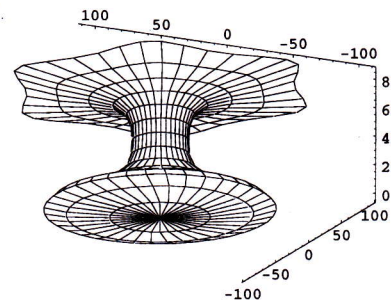


Fig. 12: Automatic closing of the pipe in Fig. 7

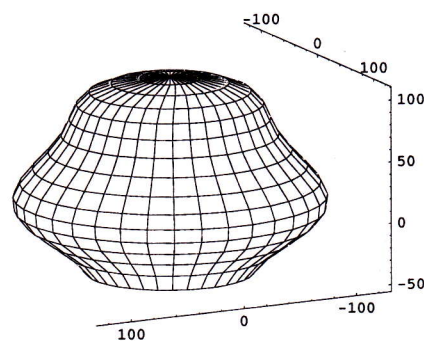


Fig. 13: Automatic closing of the pipe in Fig. 1

$\mathbf{T}_v = \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{R}(u, v) \equiv \mathbf{0}$ ($u = 0, v \in [0, 1]$), the tangent plane of the surface considered as a point set does exist. The u -parameter lines of the patch end up at the singular vertex with coplanar tangent vectors, no pair of which are parallel. Under these conditions the technique of the so-called height function can be applied for the computation of the Gauß curvature at the singular point [8]. The height function $z = h(x, y)$ is defined in the neighbourhood of the singular point over the tangent plane. It is a single-valued, C^2 -smooth uniquely defined function, and provides a local second order approximation of the degenerate surface at the singular point. The exact representation of the height function is not necessary for the computation of the Gauß curvature, only its second derivatives in the singular vertex.

By assumption, $h(0, 0) = 0$ and $h'_x(0, 0) = h'_y(0, 0) = 0$, therefore the Gauß curvature at the origin is

$$K = h''_{xx}(0, 0)h''_{yy}(0, 0) - [h''_{xy}(0, 0)]^2, \quad (14)$$

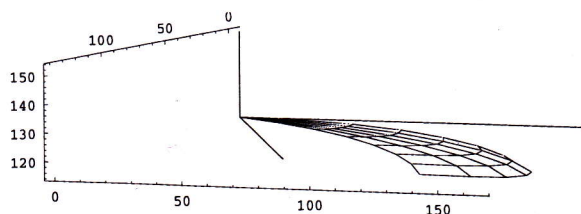


Fig. 14: Closing patch and the local coordinate system

and the normal curvature in a direction given by the unit vector (x_α, y_α) in the tangent plane is

$$\kappa_\alpha = h''_{xx}(0,0)x_\alpha^2 + 2h''_{xy}(0,0)x_\alpha y_\alpha + h''_{yy}(0,0)y_\alpha^2. \quad (15)$$

Now we substitute the normal curvatures κ_α of the approximating surface $z = h(x, y)$ by the curvature at the point $(0, 0)$ of the isoparametric surface curve $v = \text{const}$ of the surface $\mathbf{R}(u, v)$, which has the tangent direction (x_α, y_α) . Choosing three u -parameter lines with pairwise linearly independent tangent directions, three linear equations can be written in this way for the three unknown values $h''_{xx}(0,0)$, $h''_{xy}(0,0)$ and $h''_{yy}(0,0)$. Solving the system of equations (15) we get the Gauß curvature of the surface $z = h(x, y)$. As stated in [8] and verified by our calculations, this Gauß curvature does not depend (with relatively large of 1 percent error) on the three chosen surface curves $v = \text{const}$ of the surface $\mathbf{R}(u, v)$, if a height function exists. The existence of the height function is ensured by the conditions

$$(\partial_u \psi(0, 0) - \partial_u \psi(0, 1)) \cdot \partial_u \partial_v \psi(0, v) \neq 0$$

and

$$\partial_u \det(\psi'(0, v)) \neq 0 \quad \text{for all } v \in [0, 1],$$

where $\psi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ and $\det \psi'(u, v)$ is the determinant of the Jacobian of $\psi(u, v)$ [8]. These conditions can be checked easily for polynomial spline functions.

In our example (Fig. 8) the Monge representation of the surface does not exist, because the determinant of the Jacobian matrix of $(x(u, v), y(u, v))$ in the singular point is zero, but the conditions of the existence of the height function hold. Consequently, the Gauß curvature computed by the above described method can be defined as the Gauß curvature of the surface $\mathbf{R}(u, v)$ in the singular vertex. The result of the computation for the patches of the closing part in Figure 8 was zero. For other surfaces generated without fairing, where the tangent vectors \mathbf{T}_u specified in radial directions in the tangent plane at the closing point are shorter than those computed from the fairness condition, the Gauß curvature was positive.

For the surface in Figure 10 the conditions of the existence of a height function do not hold, consequently, the Gauß curvature at the closing point does not exist.

6 Conclusions

The presented algorithm developed for a special extension of tube shaped surfaces works on tensor product B-spline surfaces of (3,2) degrees. The extension for closing the pipe at one end is composed from degenerate rectangular patches. Their control nets have been created by using the method of phantom (pseudo) vertices. These control points are computed from prescribed boundary conditions, therefore cannot be used for interactive shape control in the usual

way. A fairness condition has been applied to avoid inconvenient user inputs, for example, specifying the magnitudes of tangent vectors. Also, an automatic closing of a pipe has been shown based on the minimization of a fairness functional. The given method can be extended without significant changes to rational B-spline surfaces with the restriction that the weights of the control points of the newly generated patches are fixed and the weights of the phantom points equal one.

The computations have been carried out with the help of Mathematica [7], the control nets have been generated by the modelling system of the author implemented on a 16 MB PC.

References

- [1] CHOI, B. K.; YOO, W. S.; LEE, C. S.: Matrix representation for NURB curves and surfaces, *Computer-aided design*, **22/4** (1990), pp. 235–239
- [2] FARIN, G.: *Curves and surfaces for computer aided geometric design*, Academic Press, 1988
- [3] NOWACKI, H.; LÜ, X.: Fairing composite polynomial curves with constraints, *Computer Aided Geometric Design*, **11** (1994), pp. 1–15
- [4] ROGERS, D. F.; ADAMS, J. A.: *Mathematical Elements for Computer Graphics*, second edition, McGraw-Hill, 1990
- [5] SZILVÁSI-NAGY, M.: Tubular NURB surfaces with boundary control, *Math. Pannonica*, **6/2** (1995), pp. 217–228
- [6] SZILVÁSI-NAGY, M.: Shaping and fairing of tubular B-spline surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, **14** (1997), pp. 699–706
- [7] WOLFRAM, S.: *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley Publishing Company, 1991
- [8] WOLTER, F.-C.; TUOHY, S. T.: Curvature computations for degenerate surface patches, *Computer Aided Geometric Design*, **9** (1992), pp. 241–270

Dr. Márta Szilvási-Nagy

Department of Geometry, Institute of Mathematics

Technical University of Budapest

H-1521 Budapest, Hungary

e-mail: szilvasi@math.bme.hu

Original scientific paper
 Accepted 2. 11. 1998.

ATTILA BÖLCSKEI, EMIL MOLNÁR*

How to Design Nice Tilings?

Dedicated to the memory of Professor Stanko Bilinski

How to Design Nice Tilings?

ABSTRACT

Motivated by famous nice tilings we classify all Γ -tilings (\mathcal{T}, Γ) in the planes of constant curvature with 5 barycentric triangle orbits under a discontinuous isometry group Γ . We describe the 13 infinite series of the resulting tilings by so-called D -diagrams and additional rotation parameters in our Table. Depending on the parameters, the tilings are realizable in the sphere (S^2), in the Euclidean (E^2) or hyperbolic (H^2) plane. The starting examples are depicted in our figures. Summarizing two theorems are formulated in Section 3.

Key words: D -symbol, tiling in the plane

Kako projektirati lijepo popločavanje?

SAŽETAK

Motivirani lijepim popločavanjem klasificiramo sva Γ -popločavanja (\mathcal{T}, Γ) u ravninama konstantne zakrivljenosti s pet baricentričkih trokutastih orbita pod nekontinuiranom grupom izometrija Γ . U tabeli prikazujemo 13 beskonačnih serija dobivenih popločenja pomoću tzv. D -dijagrama i dodatnih parametara rotacije. Ovisno o parametrima popločenja se mogu realizirati u sfernoj (S^2), euklidskoj (E^2) ili hiperboličkoj (H^2) ravnini. Početni primjeri prikazani su na slikama. Dva zaključna teorema izrečena su u odjeljku 4.

Ključne riječi: D -simbol, popločavanje ravnine

1 An Archimedean tiling and its generalization by D -symbols

We start with a tiling which seemingly was a favorite one of Professor Bilinski [1]. This tiling (\mathcal{T}, Γ) in Fig. 1 fills the Euclidean plane E^2 with regular triangles and quadrates under a symmetry group Γ , acting transitively on the vertices of \mathcal{T} . Such an Archimedean tiling can be described by the symbol $(4, 3, 4, 3, 3)$ showing the cyclic order of the corresponding polygons about each vertex.

Now we introduce a concise symbol for (\mathcal{T}, Γ) , called D -symbol (to honour of B. N. Delone (Delaunay), M. S. Delaney and A. W. M. Dress [7, 8, 11]), which reflects the combinatorics and periodicity of \mathcal{T} at the same time.

We prepare the formal barycentric subdivision C of \mathcal{T} with (labelled or coloured) sides

$$0 \text{ } \cdots \cdots \text{ } , \quad 1 \text{ } \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{ } , \quad 2 \text{ } \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{ } . \quad (1.1)$$

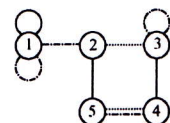
Each barycentric triangle has a 0-side opposite to its vertex (a 0-dimensional constituent of \mathcal{T}), a 1-side opposite to a (formal 1-dimensional) edge centre, a 2-side (polygon side) opposite to a (formal 2-dimensional) tile centre. We assume that this barycentric subdivision is invariant under the action of Γ . Thus, we obtain finitely many, now exactly 5, barycentric triangles (numbered by $1, \dots, 5$ in Fig. 1) whose Γ -images induce the whole tiling \mathcal{T} . We can introduce adjacency operations

$$\sigma_0 \text{ } \cdots \cdots \text{ } , \quad \sigma_1 \text{ } \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{ } , \quad \sigma_2 \text{ } \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{ }$$

for the above Γ -orbits of barycentric triangles

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} =: \mathcal{D} := \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\} \quad (1.2)$$

and draw a complete diagram



$$= (\Sigma_I, \mathcal{D}). \quad (1.3)$$

This expresses exactly the above operations as involutive permutations of the set \mathcal{D} :

$$\sigma_0(1)(2,3)(4,5), \quad \sigma_1(1,2)(3)(4,5), \quad \sigma_2(1)(2,5)(3,4). \quad (1.4)$$

Considering the barycentric triangles C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 in Fig. 1, they form a fundamental domain

$$\mathcal{F} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \quad (1.5)$$

for the group Γ . The σ -operations describe the generators of Γ as follows:

$\sigma_0(1) = 1$ means that the triangle C_1 and $\sigma_0(C_1)$ lie in the same Γ -orbit D_1 . We write $\sigma_0(C_1) = C_1^{m_0}$, the line reflection m_0 , as a generator of Γ , is written into the exponent.

* Supported by the Hungarian National Science Grant (OTKA), Grant No. T020498/1996.

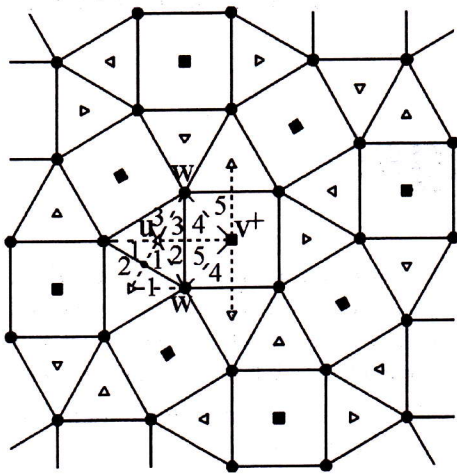


Fig. 1: $\Gamma_{5.12}(3 \cdot 1, 4^+; 5 \cdot 1)$

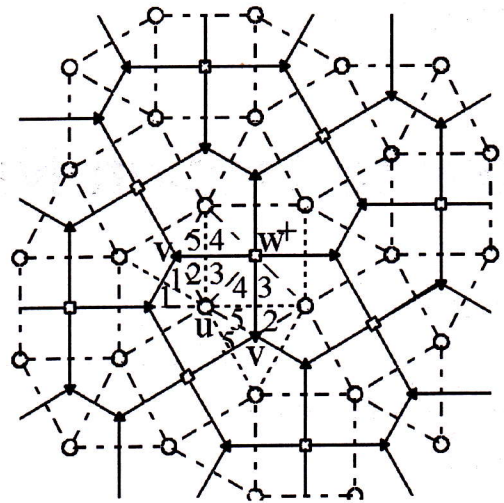


Fig. 2: $\Gamma_{5.13}(5 \cdot 1; 3 \cdot 1, 4^+)$

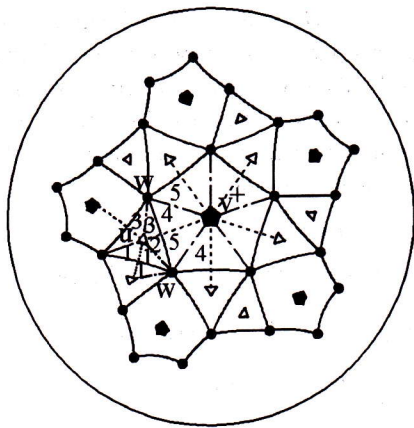


Fig. 3: $\Gamma_{5.12}(3 \cdot 1, 5^+; 5 \cdot 1)$

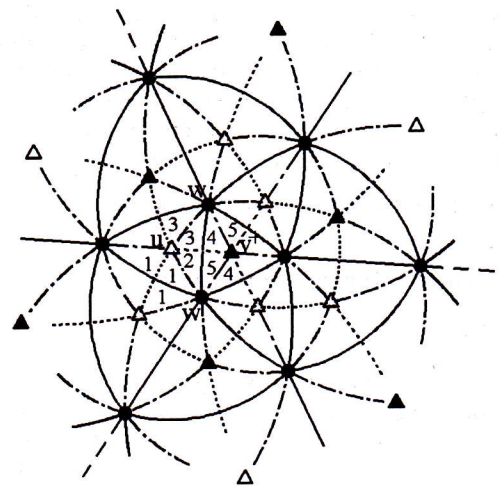


Fig. 4: $\Gamma_{5.12}(3 \cdot 1, 3^+; 5 \cdot 1)$

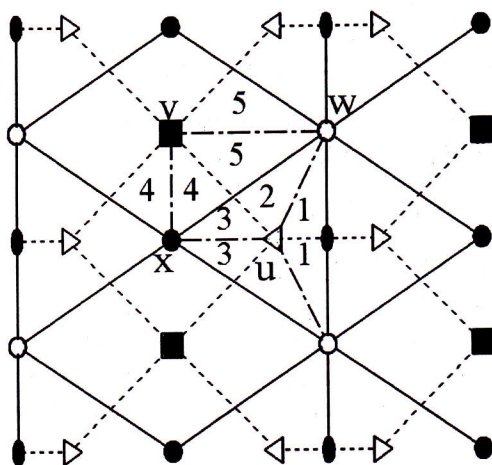


Fig. 5: $\Gamma_{5.11}(3 \cdot 1, 2 \cdot 2; 3 \cdot 2, 2 \cdot 2)$

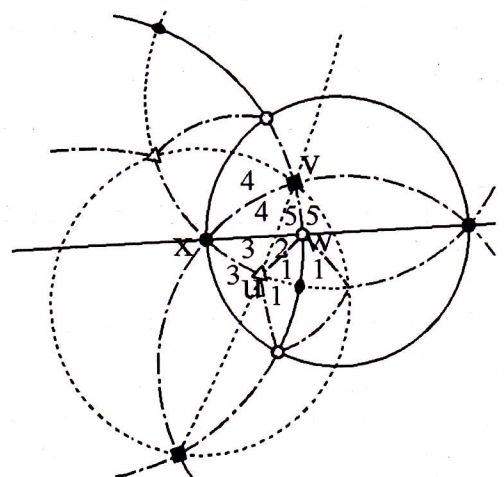


Fig. 6: $\Gamma_{5.11}(3 \cdot 1, 2 \cdot 2; 3 \cdot 1, 2 \cdot 2)$

Now $\sigma_1(3) = 3$ analogously means, that C_3 and $\sigma_1(C_3)$ belong to the same Γ -orbit D_3 , $\sigma_1(C_3) = C_3^{m_1}$, m_1 is also a generator of Γ . Then $\sigma_2(1) = 1$ defines $\sigma_2(C_1) = C_1^{m_2}$, a new generating reflection m_2 for Γ .

Finally $\sigma_1 : (4,5)$ defines the generating rotation r by $\sigma_1(C_5) = \sigma_1(C_5) = C_4^r$ and its inverse r^{-1} by $\sigma_1(C_5) = \sigma_1(C_4) = C_5^{r^{-1}}$.

Notice almost the same situation in Figs. 3–4 as pictures of the hyperbolic plane \mathbb{H}^2 and the sphere \mathbb{S}^2 , respectively, by their conforme models.

We see, these tilings have the same D -diagram, denoted by (Σ_I, \mathcal{D}) , of 5 elements. Further, we say that the same adjacency structure

$$\Sigma_I := \{\sigma_i, i \in I = \{0,1,2\} : \sigma_i^2 := \sigma_i \sigma_i = 1\}, \text{ by (1.3)} \quad (1.6)$$

as a 'free' Coxeter reflection group acts on \mathcal{D} , and induces first a group scheme

$$\Gamma := (m_0, m_1, m_2, r : 1 = m_0^2 = m_1^2 = m_2^2) \quad (1.7)$$

and a surface (topological 2-space) is defined by $\overline{\mathcal{F}}$, the fundamental domain \mathcal{F} in (1.5) is endowed by the side identification as (1.3) and (1.7) describe.

We have a symmetric matrix function with natural values

$$r_{ij} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{N}_{I \times I}, \text{ defined by (1.3)} \quad (1.8)$$

$$r_{ij}(D) := \min \{r : (\sigma_j \sigma_i)^r \cdot D = D\}$$

which determines just the surface topology of $(\Sigma_I, \mathcal{D}) = \overline{\mathcal{F}}$.

Now, $r_{01}(D_1, D_2, D_3) = 3$, $r_{01}(D_4, D_5) = 1$ appear in our Table at $\Gamma_{5.12}(3u, v^+; 5w)$ as the coefficients of u and v^+ , respectively. The coefficient of w is just

$$r_{12}(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5) = 5. \quad (1.9)$$

This indicates the vertex transitivity, since we have one (σ_1, σ_2) -orbit. The coefficients

$$r_{02}(D_1) = 1, \quad r_{02}(D_2, D_3, D_4, D_5) = 2^+ \quad (1.10)$$

will not appear in our Table, $r_{ii} = 1$ stands by convention ($i \in I$).

Next we turn back to Fig. 1 by introducing the rotation parameters (orders, also a matrix function v_{ij} on \mathcal{D}):

$$v_{01}(D_1, D_2, D_3) = u = 1,$$

$$v_{01}(D_4, D_5) = v^+ = 4^+, \quad (1.11)$$

$$v_{12}(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5) = w = 1.$$

Here v^+ indicates that we have a cyclic rotation group as a stabilizer of the 2-centre at D_4, D_5 . Else we have dihedral group with the corresponding rotation subgroup order.

Then as a last step we define the adjacency D -matrix by

$$m_{ij} = r_{ij} \cdot v_{ij} \text{ with } m_{02} = 2 \text{ for each } D \in \mathcal{D}, \quad (1.12)$$

where $m_{01} \geq 3$ and $m_{12} \geq 3$ are assumed for convention.

This fixes some rotation orders $v_{02} := 2/r_{02}$, e. g.

$$v_{02}(D_1) = \frac{2}{1} = 2, \quad v_{02}(D_2, D_3, D_4, D_5) = 1^+. \quad (1.13)$$

Moreover, **and this could be the starting point**, the matrix function, by the barycentric simplicies C in the full subdivision C :

$$m_{ij} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{N}_{I \times I}, \quad (1.14)$$

$$m_{ij}(D) := \min \{m : (\sigma_j \sigma_i)^m \cdot C = C, C \in D\},$$

will determine the combinatorial structure of the tiling (\mathcal{T}, Γ) , by fixing the defining relations for the generators of Γ , in addition to (1.7). By (1.11) we have

$$(m_0 m_1)^u = 1, \quad r^v = 1, \quad (m_1 r m_2 r^{-1})^w = 1, \quad (1.15)$$

moreover, $(m_0 m_2)^2 = 1$ by (1.13).

With $(u, v; w) = (1, 4; 1)$ we obtain the Euclidean tiling (\mathcal{T}, Γ) in Fig. 1, indeed, as the Table at $\Gamma_{5.12}(3u, v^+; 5w)$ contains. The group $\Gamma = \mathbf{p4g} = 4 * 2$ is a Euclidean plane crystallographic group, now.

In general we have vertex-transitive (Archimedean or uniform) tilings: $(v, 3u, v, 3u, 3u)$ -polygons w -times around each vertex, with groups Γ by (1.7) and (1.15):

$$\Gamma = \Gamma_{5.12} = v * u, 2, w = (+, 0; [v]; \{(u, 2, w)\}). \quad (1.16)$$

Here we indicated Conway's notation and Macbeath's signature, too [10].

Definition 1.1.

The D -diagram (Σ_I, \mathcal{D}) together with the matrix function $D \mapsto m_{ij}(D)$ will be called D -symbol.

We mention roughly the **theorem** of A. W. M. Dress:

A "good" D -symbol describes a tiling (\mathcal{T}, Γ) , up to an equivariant homeomorphism, uniquely in a space of constant curvature $\mathbb{S}^2 (>)$, $\mathbb{E}^2 (=)$, $\mathbb{H}^2 (< 0)$ iff for the so-called curvature

$$K(\mathcal{D}, m_{ij}) := \sum_{D \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{m_{01}(D)} + \frac{1}{m_{12}(D)} - \frac{1}{2} \right) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad (1.17)$$

holds.

Definition 1.2.

Two tilings (\mathcal{T}, Γ) and (\mathcal{T}', Γ') are equivariantly homeomorphic if there is a bijection

$$\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}' \quad (1.18)$$

preserving all incidences (thus all adjacencies) such that

$$\Gamma' = \varphi^{-1} \Gamma \varphi. \quad (1.19)$$

In short, φ carries also the group action from \mathcal{T} onto \mathcal{T}' .

The curvature to $\Gamma_{5.12}(3u, v^+; 5w)$ will be by (1.17)

$$K = \left(\frac{1}{3u} + \frac{1}{5w} - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{5w} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2$$

$$= \frac{1}{u} + \frac{2}{v} + \frac{1}{w} - \frac{5}{2}.$$
(1.20)

This provides us spherical tiling for $(u, v; w) = (1, 3; 1)$ in Fig. 4 by stereographic projection. The underline indicates, as it reads in the Table, that Γ is not maximal in that case. Namely, the combinatorial automorphism group of \mathcal{T} is larger than the group $\Gamma = \mathbf{m}\bar{3} = 3 * 2$. The tiling $(\mathcal{T}, \Gamma = \text{Aut } \mathcal{T})$ is just the icosahedron tiling on S^2 that can be described by D -symbol of 1 element and matrix $m_{01} = 3, m_{12} = 5$, as $\Gamma(\bar{u} = 3u = v = 3, \bar{v} = 5w = 5)$ stands in the Table. This group is generated by 3 reflections on the sides of the spherical triangle with angles $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$. We excluded $v = 2$, serving digons on S^2 .

We see in Fig. 3 the minimal hyperbolic solution in \mathbb{H}^2 : $(u, v; w) = (1, 5; 1)$ providing $K = -\frac{1}{10}$ negative curvature. But we have infinite hyperbolic series by choosing $1 < u$ or $1 < w$ with $3 \leq v$, e. g. $(u, v; w) = (2, 3; 1)$ as Archimedean tiling $(3, 6, 3, 6, 6)$.

2 The face-transitive dual tiling (4, 3, 4, 3, 3) and its relatives. Self dual tilings

In Fig. 2 we have depicted the dual tiling $(\bar{\mathcal{T}}, \Gamma)$ to the former one in Fig. 1. We only remarks that the machinery by D -symbol is straightforward. We change the lines, adjacencies, σ_i -operations in the D -diagram (1.3) as

$$0 \cdots \cdots \sigma_0 \longleftrightarrow 2 \text{ --- } \sigma_2,$$

$$1 \text{ ---- } \sigma_1 \longleftrightarrow 1 \text{ ---- } \sigma_1$$
(2.1)

indicate. Then the matrix functions r_{ij}, v_{ij}, m_{ij} , introduced in the former section 1, also change the indices $0 \leftrightarrow 2$ and $1 \leftrightarrow 1$. This reads in our Table at $\Gamma_{5.13}(5u, 3v, w^+)$, where the shorter dual diagram of (1.3) can be seen with changing the nodes $\textcircled{3} \leftrightarrow \textcircled{5}$ for a technical reason later on.

For short we left the loops from the D -diagrams in our Table.

Fig. 2 directly depicts the dual tiling of Fig. 1. Since the former one was vertex transitive, the laer one is tile transitive by pentagons with vertex valences $(4, 3, 4, 3, 3)$ in the title of this section 2.

Fig. 3 and Fig. 4 depict the dual tilings by dotted $0 \cdots \cdots$ lines in \mathbb{H}^2 and S^2 , respectively. This convention will also be kept later on.

Self dual tilings with corresponding parameters can be seen in Fig. 6 to the group $\Gamma_{5.11}(3u = 3, 2v = 4; 3w = 3, 2x = 4)$.

For $(u, v; w, x) = (1, 4; 1, 4)$ we would have self dual Euclidean tilings with concave 8-gons and triangles in a nice manner, left to draw by the Reader.

As the former analysis to D -diagram and group

$$\Gamma_{5.11}(3u, 2v; 3w, 2x) = *u, 2, w, v, x$$
(2.2)

in our Table show, the barycentric triangles form a fundamental domain

$$\bar{\mathcal{F}} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$$
(2.3)

with reflections in its sides as the D -diagram \mathcal{D} dictates.

So $\bar{\mathcal{F}}$ will be a disc with cornerpoints by (2.2) or angles

$$\frac{\pi}{u}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{w}, \frac{\pi}{v}, \frac{\pi}{x}$$
(2.4)

on the boundary. The corresponding reflections generate the group Γ and produce the tiling $(mtcT, \Gamma)$ in $S^2 (> 0)$, $E^2 (= 0)$ or $\mathbb{H}^2 (< 0)$ by the curvature

$$K = \left(\frac{1}{3u} + \frac{1}{3w} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{3u} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2v} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2v} + \frac{1}{3w} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{x} - \frac{5}{2} \geq 0.$$
(2.5)

This is in conformity with the comparison of the angle sum in (2.4) and the angle sum 3π of a Euclidean pentagon.

Fig. 6 shows a self dual spherical tiling from the infinite series $(u, v; w, x) = (1, 2; 1, x)$. The self dual tiling with the group

$$\Gamma_{5.11}(3 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 1, 2 \cdot 3) = \bar{4}3\mathbf{m} = *2, 3, 3$$
(2.6)

realizes on S^2 with concave hexagons and triangles or by a polyhedron with 4 hexagons and 12 triangles as faces. The Reader would make this polyhedron.

Fig. 5 shows us again a Euclidean tiling from the series $\Gamma_{5.11}$ with the same D -diagram, however, it is not self dual because of the parameters $(u, v; w, x) = (1, 2; 2, 2)$. Then we have

$$\Gamma = \mathbf{pmm} = *2, 2, 2, 2$$
(2.7)

a plane chrystallographic group with a rectangle disc as fundamental domain. We have depicted the continuous triangles and rhombs, moreover the dotted hexagons and rhombs.

All tilings to $\Gamma_{5.11}$ is $(2, 2, 2)$ -transitive, i. e. we have $2-2-2$ Γ -orbits of tiles, edges and vertices, respectively.

This transitivity property is indicated at the diagrams in our Table for every series.

3 The classification of D -symbols and their tiling series with $|\mathcal{D}| = 5$

The D -symbol method provides us a systematic tool to classify tilings in the plane, moreover in the space, and in d -dimensional space, in general.

This program was proposed in [11] and solved up to $d = 3$, $|\mathcal{D}| = 3$, i. e. up to 3 barycentric simplices in the fundamental domain. In the plane ($d = 2$) the tilings have been classified up to $|\mathcal{D}| = 4$ for another publication just by the

program of [11] illustrated in this paper. However, we face to great difficulties in dimension $d = 3$ as [11] indicates. E. g. 8 homogeneous 3-spaces (Thurston-geometries) may occur, if the metric realization is still possible. Splittings on 2-surfaces (orbifolds) occur already in [11] where different geometries are realizable in the different pieces. Behind these stands the Thurston-conjecture to be decided.

In [11] we showed that for any cardinality $|\mathcal{D}|$ fixed there exists finitely many D -diagrams (Σ_I, \mathcal{D}) in each dimension d , where the index set $I = \{0, 1, \dots, d\}$ occurs for the adja-

Table: Two-dimensional D -symbols with $|\mathcal{D}| = 5$

<p>(3, 3, 1)-transitive</p>	$\Gamma_{5.1}(5u; v, 2w, 2x) = *u, v, w, x, 2$ $= (+, 0; []; \{(u, v, w, x, 2)\})$; $1 \leq u, 3 \leq v, 2 \leq w, x$ max. iff $v = 2w = 2x$ does not hold, else $\Gamma_1(\bar{u} = 5u; \bar{v} = v = 2w = 2x)$ is its super group. $(u; v, w, x) - \mathbb{H}^2 : (1; 3, 2, 2), \dots$
<p>(2, 3, 2)</p>	$\Gamma_{5.2}(3u, 2v; w, 4x) = *u, v, 2, x, w$ $= (+, 0; []; \{(u, v, 2, w, x)\})$; $1 \leq u, 2 \leq v, 3 \leq w, 1 \leq x$ max. iff $3u \neq 2v$ or $w \neq 4x$, else $\Gamma_1(\bar{u} = 3u = 2v; \bar{v} = w = 4x)$ is its super group. $(u; v, w, x) - \mathbb{S}^2 : (1, 2; w, 1), (1, 3; 3, 1),$ $(1, 3; 4, 1), (1, 3; 5, 1), (1, 4; 3, 1), (1, 5; 3, 1)$ $- \mathbb{E}^2 : (1, 3; 6, 1), (1, 4; 4, 1), (1, 6; 3, 1)$ $- \mathbb{H}^2 : \text{else}$
<p>(2, 3, 1)</p>	$\Gamma_{5.3}(5u; v, 4w) = 2 * u, v, w, 2$ $= (+, 0; [2]; \{(u, v, w, 2)\})$; $1 \leq u, 3 \leq v, 1 \leq w$ max. iff $v \neq 4w$, else $\Gamma_1(\bar{u} = 5u; \bar{v} = v = 4w)$ is its super group. $(u; v, w) - \mathbb{H}^2 : (1; 3, 1), \dots$
<p>(2, 3, 2)</p>	$\Gamma_{5.4}$ is dual to $\Gamma_{5.2}$ by $1 \leftrightarrow 5, 2 \leftrightarrow 4, 3 \leftrightarrow 3, 4 \leftrightarrow 2, 5 \leftrightarrow 1$ and $--- \leftrightarrow ---, \dots \leftrightarrow ---$
<p>(2, 3, 1)</p>	$\Gamma_{5.5}(5u; 2v, 3w) = 2 * u, 2, v, w$ $= (+, 0; [2]; \{(u, 2, v, w)\})$; $1 \leq u, 2 \leq v, 1 \leq w$ max. iff $2v \neq 3w$, else $\Gamma_1(\bar{u} = 5u; \bar{v} = 2v = 3w)$ is its super group. $(u; v, w) - \mathbb{E}^2 : (1; 2, 1) - \mathbb{H}^2 : \text{else}$
<p>(1, 3, 3)</p>	$\Gamma_{5.6}$ is dual to $\Gamma_{5.1}$ by $1 \leftrightarrow 5, 2 \leftrightarrow 4, 3 \leftrightarrow 3, 4 \leftrightarrow 2, 5 \leftrightarrow 1$ and $--- \leftrightarrow ---, \dots \leftrightarrow ---$
<p>(1, 3, 2)</p>	$\Gamma_{5.7}$ is dual to $\Gamma_{5.5}$ by $1 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 3, 4 \leftrightarrow 4, 5 \leftrightarrow 5$ and $--- \leftrightarrow ---, \dots \leftrightarrow ---$

<p>(1, 3, 2)</p>	$\Gamma_{5.8}$ is dual to $\Gamma_{5.3}$ by $1 \leftrightarrow 5, 2 \leftrightarrow 4, 3 \leftrightarrow 3, 4 \leftrightarrow 2, 5 \leftrightarrow 1$ and $--- \leftrightarrow ---, \dots \leftrightarrow ---$
<p>(1, 3, 1) Self dual (Sd)</p>	$\Gamma_{5.9}(5u; 5v) = 2, 2 * u, 2, v$ $= (+, 0; [2, 2]; \{(u, 2, v)\})$; $1 \leq u, 1 \leq v$ non maximal: $\Gamma_1(\bar{u} = 5u; \bar{v} = 5v)$ is its super group. $(u; v) - \mathbb{H}^2 : (1; 1), \dots$
<p>(1, 2, 1) Self dual: $3 \leftrightarrow 4$</p>	$\Gamma_{5.10}(5u; 5v) = *u, 2, v, \times$ $= (-, 1; []; \{(u, 2, v)\})$; $1 \leq u, 1 \leq v$ non maximal: $\Gamma_1(\bar{u} = 5u; \bar{v} = 5v)$ is its super group. $(u; v) - \mathbb{H}^2 : (1; 1), \dots$
<p>(2, 2, 2) Self dual: $3 \leftrightarrow 5$</p>	$\Gamma_{5.11}(3u, 2v; 3w, 2x) = *u, 2, w, v, x$ $(+, 0; []; \{(u, 2, w, v, x)\})$; $1 \leq u, 2 \leq v, 1 \leq w, 2 \leq x$ max. iff $3u \neq 2v$ or $3w \neq 2x$, else $\Gamma_1(\bar{u} = 3u = 2v; \bar{v} = 3w = 2x)$ is its super group. $(u, v; w, x) - \mathbb{S}^2 : (1, 2; 1, x), (1, v; 1, 2),$ $(1, 3; 1, 3), (1, 3; 1, 4), (1, 3; 1, 5), (1, 4; 1, 3),$ $(1, 5; 1, 3) - \mathbb{E}^2 : (1, 2; 2, 2), (1, 3; 1, 6),$ $(1, 4; 1, 4), (1, 6; 1, 3), (2, 2; 1, 2) -$ $\mathbb{H}^2 : \text{else}$
<p>(1, 2, 2)</p>	$\Gamma_{5.12}(3u, v+; 5w) = v * u, 2, w$ $= (+, 0; [v]; \{(u, 2, w)\})$; $1 \leq u, 3 \leq v, 1 \leq w$ max. iff $3u \neq v$, else $\Gamma_1(\bar{u} = 3u = v; \bar{v} = 5w)$ is its super group. $(u, v; w) - \mathbb{S}^2 : (1, 3; 1) - \mathbb{E}^2 : (1, 4; 1)$ $- \mathbb{H}^2 : \text{else, e.g. } (1, 5; 1)$
<p>(2, 2, 1)-transitive</p>	$\Gamma_{5.13}$ is dual to $\Gamma_{5.12}$ by $3 \leftrightarrow 5; \dots \leftrightarrow ---$ $\Gamma_{5.13}(5u; 3v, w+) = w * u, 2, v$ $= (+, 0; [w]; \{(u, 2, v)\})$; $1 \leq u, 1 \leq v, 3 \leq w$ max. iff $3v \neq w$, else $\Gamma_1(\bar{u} = 5u; \bar{v} = 3v = w)$ is its super group. $(u; v, w) - \mathbb{S}^2 : (1; 1, 3) - \mathbb{E}^2 : (1; 1, 4)$ $- \mathbb{H}^2 : \text{else, e.g. } (1; 1, 5)$

cencies, colours, matrix functions, etc. The geometric reason, namely that for the adjacency matrix

$$\begin{aligned}
 m_{ij} &: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{N}_{I \times I}, \\
 m_{ij} = 2 & \text{ stands for } |i - j| > 1, i, j \in I
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

considerably reduces the number of cases, and we gave an ordering and listing algorithm for D -diagrams and for the D -symbols, in general. This is of very large complexity, but for $d = 2$, in the plane, the realizability in \mathbb{S}^2 , \mathbb{E}^2 or \mathbb{H}^2 is no question more. Although we need computer as in [7, 8, 10], e. g., the algorithms are elaborated (D. H. Huson, O. Delgado Friedrichs are cited in our references).

Our Table lists all D -diagrams of elements $|\mathcal{D}| = 5$ in our lexicographic order by the index set $I = \{0, 1, 2\}$. We mention the steps to this ordering:

- i) Let a D -diagram $(\Sigma_I, \mathcal{D}(D_1))$, with a fixed starting element D_1 , be given. Assume, that $D_1, \dots, D_r, r < |\mathcal{D}| =: n$ have already been numbered. Consider $\sigma_0(D_r), \sigma_1(D_r)$. The first of them, not listed yet, will be D_{r+1} if it exists.
- ii) Else we take $\sigma_2(D_r), \dots, \sigma_d(D_1); \dots; \sigma_d(D_r), \dots, \sigma_d(D_1)$. The first new one will be D_{r+1} .
- iii) Then we proceed with $r \mapsto r + 1$ as above, still we end at $D_n, n = |\mathcal{D}|$.
- iv) The distance of two elements D_x, D_y can be obtained: We chose $D_x = D_{1'}$ for starting element and proceed as above. If we get $D_y = D_{k'}$ then the distance is $D_x D_y = k - 1$.
- v) Let two D -diagrams $\mathcal{D}(D_1)$ and $\mathcal{D}'(D_{1'})$ be given, each with distinguished starting elements as above. We define $\mathcal{D} < \mathcal{D}'$ by the following preferences a–d:
 - a) $|I| < |I'|$ (dimension);
 - b) $|\mathcal{D}| < |\mathcal{D}'|$ (cardinality);
 - c) Consider equally numbered elements and their σ -images. In reverse preference on $I = I'$ we consider distances: $D_1 \sigma_d(D_1) < D_{1'} \sigma_d(D_{1'})$; if = holds then $D_2 \sigma_d(D_2) < D_{2'} \sigma_d(D_{2'})$; ...; if = holds then $D_1 \sigma_{d-1}(D_1) < D_{1'} \sigma_{d-1}(D_{1'})$; ...
 - d) If = stands in each place then the D -diagrams are isomorphic. Then come the matrix function m_{ij} and m'_{ij} by increasing preferences in their 01, 12, $(d - 1)d$ entries for the equal elements.

You see that these algorithms can be implemented onto computer; although we can proceed now by hands. We formulate our results by the Table and figures.

Theorem 3.1.

There are exactly 13 isomorphism classes of D -diagrams with $|\mathcal{D}| = 5$ elements in dimension 2, numbered by group schemes $\Gamma_{5.1} - \Gamma_{5.13}$ and the free rotation orders as parameters.

Among them we have 3 self dual classes: 2 non-maximal and 1 possibly maximal series $\Gamma_{5.11}$ for the dually equal parameters.

We have 5 dual pairs of series for the dually equal parameters for which the corresponding groups are conjugate by the duality mapping.

The last concept is just the same as in (1.18–19) but φ changes dotted and continuous lines, preserves broken lines (see (1.1)) in the barycentric subdivisions.

The corresponding tilings are realizable in a plane of constant curvature, we listed in our Table and read

Theorem 3.2.

There are exactly 15 Euclidean tilings (\mathcal{T}, Γ) with 5 barycentric triangle orbits under Γ , up to equivariant homeomorphism: One self dual tiling in $\Gamma_{5.11}$ and seven dual pairs: 3 pairs in $\Gamma_{5.2} - \Gamma_{5.4}$; 1 pairs in $\Gamma_{5.5} - \Gamma_{5.7}$; 2 pairs in $\Gamma_{5.11}$; 1 pairs in $\Gamma_{5.12} - \Gamma_{5.13}$.

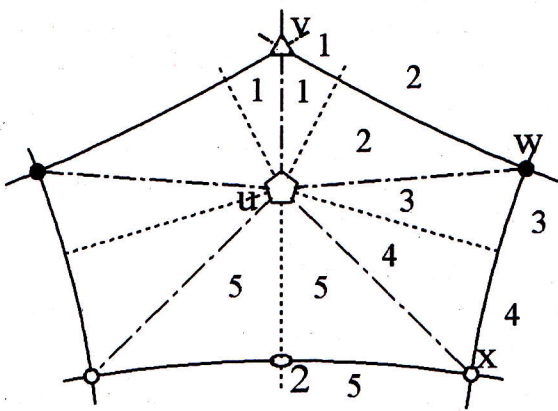
In Fig. 7 we have depicted the minimal representants of the other series. One dual pair to $\Gamma_{5.5} - \Gamma_{5.7}$ is Euclidean. One minimal spherical dual pair belongs to $\Gamma_{5.2} - \Gamma_{5.4}$. The other minimal representants are hyperbolic. The last ones are non-maximal. Combinatorally both are the regular hyperbolic tilings with pentagons of angles $2\pi/5$.

4 Closing remarks and memories

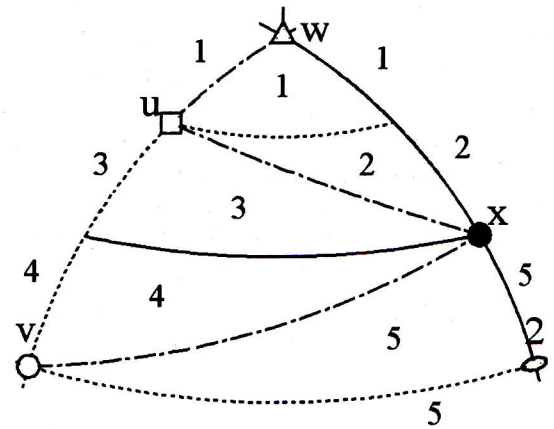
Professor Stanko Bilinski renewed the topic of combinatorial tilings in his pioneering papers [1, 2]. The hyperbolic plane \mathbb{H}^2 is very rich with possibilities. Those surfaces — the orientable ones of genus equal or bigger than 2 — whose universal cover is \mathbb{H}^2 were involved into his researches.

The theory of D -symbols, initiated and systematically developed by Andreas Dress and his school in Bielefeld, received an important influence from Professor Bilinski at an Oberwolfach seminary in 1984. The lecture held in his kind place and published in [3] gave the task to look for the quasi-regular polyhedra of genus 2 by D -symbols (that time Delaney-symbols), thus by computer. This was completely solved in [7, 8].

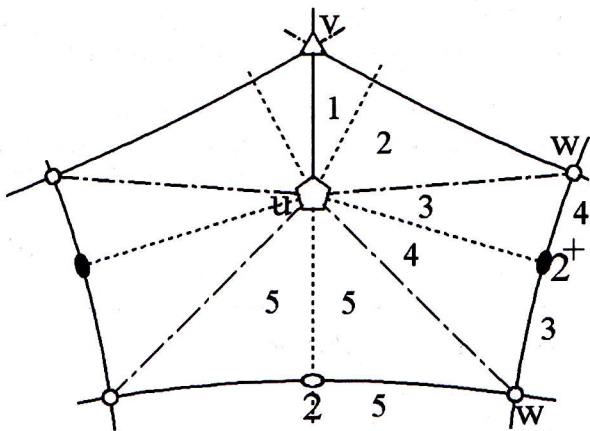
The second author met him first in that Oberwolfach conference (organized by A. W. M. Dress and Jörg Wills), we all could enjoy his kind anecdotes. We think he was paternal friend (väterlicher Freund) of many geometricians all over the world, in particular in the German and Slavic cultural



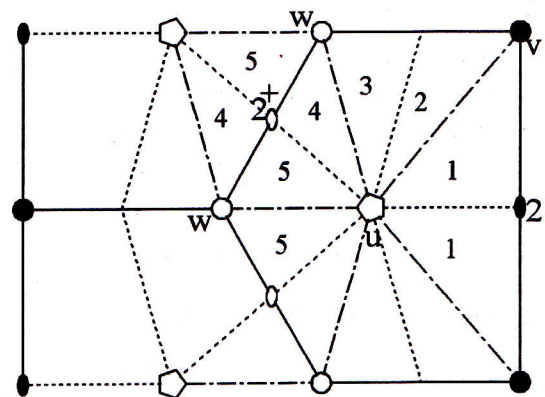
$\Gamma_{5.1}(5 \cdot 1; 3, 2 \cdot 2, 2 \cdot 2)$



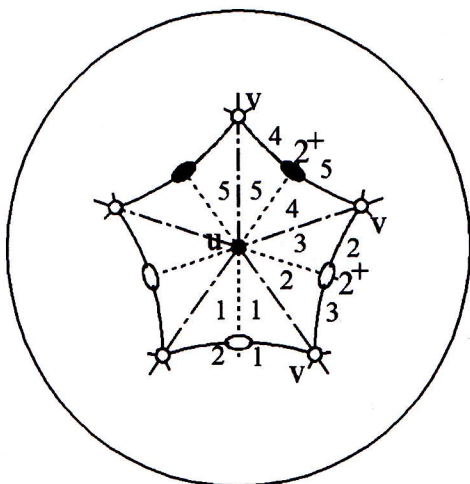
$\Gamma_{5.2}(3 \cdot 1, 2 \cdot 2; 3, 4 \cdot 1)$



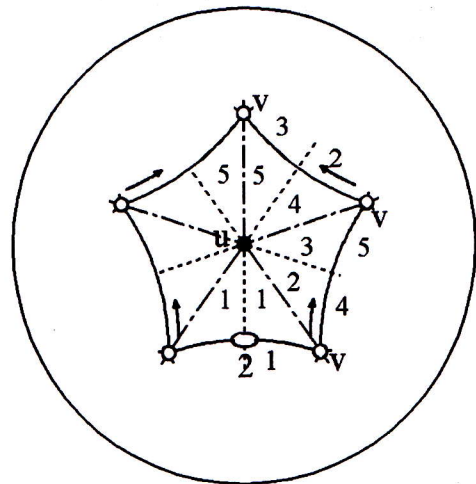
$\Gamma_{5.3}(5 \cdot 1; 3, 4 \cdot 1)$



$\Gamma_{5.5}(5 \cdot 1; 2 \cdot 2, 3 \cdot 1)$



$\Gamma_{5.9}(5 \cdot 1; 5 \cdot 1)$



$\Gamma_{5.10}(5 \cdot 1; 5 \cdot 1)$

Fig. 7

territory. He was member of the Croatian and the Austrian Academy of Sciences [3–6]. He formed a strong geometry school in the University of Zagreb with many PhD students in various fields of geometry. His works [1–5] implicitly influenced our paper [9] where his favorite Archimedean tilings were discussed on the base of plane (NEC) crystallographic groups and their fundamental domains, found finally by a computer program COMCLASS [10] (e-mail adress: comclass@matf.bg.ac.yu).

We thanks the Editors of KoG for the invitation to this paper to honour of Professor Stanko Bilinski.

References

- [1] S. BILINSKI: Homogene mreže ravnine, *Jugosl. Akad. Zn. Umj. Zagreb, Rad* **271** (1948), 145–255. — Homogene Netze der Ebene, *Bull. Int. Akad. Yugosl.* **2** (1949), 63–111.
- [2] S. BILINSKI: Homogene mreže zatvorenih orientabilnih ploha, *Jugosl. Akad. Zn. Umj. Zagreb, Rad* **277** (1951), 129–164. — Homogene Netze geschlossener orientierbarer Flächen, *Bull. Int. Acad. Yugosl.* **6** (1952), 59–75.
- [3] S. BILINSKI: Die quasiregulären Polyeder vom Geschlecht 2, *Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. math.–nat. Kl. Abt. II. Bd.* **194** (1985), 63–78.
- [4] S. BILINSKI: Die quasiregulären Polyeder zweiter Stufe, *Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. math.–nat. Kl. Abt. II. Bd.* **196** (1987), 1–12.
- [5] S. BILINSKI: Die windschiefen Archimedischen Polyeder höheren Geschlechtes, *Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. math.–nat. Kl. Abt. II. Bd.* **197** (1988), 315–326.
- [6] S. BILINSKI: Ein Beitrag zur Polyedertheorie der Rhombokubooktaeder-Familie, *Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. math.–nat. Kl. Abt. II. Bd.* **201** (1992), 117–129.
- [7] A. W. M. DRESS, R. FRANZ: Zu einer Frage von Herrn S. Bilinski, Pflasterungen von Brezelflächen betreffend, *Jugosl. Akad. Zn. Umj. Zagreb, Rad* **428** (1987), 83–101.
- [8] R. FRANZ, D. H. HUSON: The classification of quasi-regular polyhedra of genus 2, *J. Discrete and Comp. Geom.* **7** (1992), 347–357.
- [9] Z. LUČIĆ, E. MOLNÁR: Fundamental domains for planar discontinuous groups and uniform tilings, *Geom. Dedicata* **40** (1991), 125–143.
- [10] Z. LUČIĆ, E. MOLNÁR, N. VASILJEVIĆ: Combinatorial structure of fundamental polygons of finite area for plane discontinuous groups, Manuscript (1998)
- [11] E. MOLNÁR: Discontinuous groups in homogeneous Riemannian spaces by classification of D -symbols, *Publicationes Math. Debrecen* **49** (1996) 3–4, 265–294.

Attila Bölcskei and Emil Molnár
 Department of Geometry
 Institute of Mathematics
 Technical University of Budapest
 H-1521 Budapest, Hungary
 e-mail: geometry@oliva.eik.bme.hu
 or: geom@math.bme.hu

Originelle wissenschaftliche Arbeit

ANA SLIEPČEVIĆ

Angenommen 26. 11. 1998.

Die Brennpunktskurven in KS-Büscheln und KS-Scharen der isotropen Ebene

The Focal Curve of the Pencil and the Range of Conics in an Isotropic Plane

ABSTRACT

Although the pencil and the range of conics in an isotropic plane are dual their focal curves are not dual. In the paper we proved that the focal curve of the pencil of conics in an isotropic plane is in general non rational cubic. This cubic is constructed in the general and for some degenerated cases. For the range of conics the focal curve is the rational cubic with the absolute point of the plane as a double point. This cubic is constructed in general and in some interesting special cases.

Key words: focal curve, isotropic plane, pencil of conics, range of conics

Krivulje žarišta u pramenovima krivulja drugog reda i drugog razreda u izotropnoj ravnini

SAŽETAK

Iako su pramen i niz konika u izotropnoj ravnini dualne tvorevine, njihove žarišne krivulje nisu dualne. U članku se dokazuje da je žarišna krivulja rednog pramena konika izotropne ravnine općenito neracionalna kubika. Ova se kubika konstruira u općem i u nekim degeneriranim slučajevima. U pramenu krivulja drugog razreda žarišna je krivulja racionalna kubika s dvostrukom točkom u apsolutnoj točki ravnine. Ova se kubika konstruira u općem i nekim zanimljivim posebnim slučajevima.

Ključne riječi: izotropna ravnina, niz konika, pramen konika, žarišna krivulja

Kegelschnittbüschel (i. f. KS-Büschel) in der isotropen Ebene Π wurden bereits in [4] untersucht und klassifiziert. Dagegen ist die Behandlung von KS-Scharen dieser Ebene anscheinend noch offen. Während die Klassifikationstheorien von KS-Büscheln und KS-Scharen aufgrund der Selbstdualität von Π i. w. einstimmen, sind z. B. die zugehörigen Brennpunktskurven nicht dual.

In einer isotropen Ebene sind die Brennpunkte einer algebraischen Kurve bekanntlich als die Berührungspunkte ih-

rer isotropen Tangenten definiert, sodaß die Anzahl der isotropen Brennpunkte einer algebraischen Kurve gleich ihrer Klasse ist.

In diesem Artikel wurden die Brennpunktsmengen der Kegelschnitte eines KS-Büschels wie auch einer KS-Schar konstruiert. Diese Punktmengen erwiesen sich als algebraische Kurven. Genau gilt

Satz 1.

Die Brennpunktskurve der Kegelschnitte eines KS-Büschels der isotropen Ebene ist eine i. a. nichtrationale Kurve dritter Ordnung, für welche ihrerseits die Grundpunkte des KS-Büschels isotrope Brennpunkte sind und die eine isotrope Asymptote besitzt.

Beweis. Im folgenden wird die isotrope Ebene stets als projektiv abgeschlossene reelle affine Ebene mit einem uneigentlichen Linienelement (f, F) als Absolutfigur aufgefaßt; diese Ebene wird im Hinblick auf die algebraische Fragestellung gelegentlich noch komplex erweitert.

Seien zunächst vier verschiedene Punkte A, B, C und D zulässig als Grundpunkte eines nichtausgearteten KS-Büschels (k_i) gegeben (Abb. 1). Jede Gerade des Büschels isotroper Geraden (F) berührt, im algebraischen Sinn gezählt, zwei Kegelschnitte von (k_i) . Bestimmen die Punkte A, B, C, D zusammen mit dem absoluten Punkt F einen nicht ausgearteten Kegelschnitt k_F , so erwies sich F trivialerweise für diesen als (einziger) isotroper Brennpunkt, sodaß die gesuchte Brennpunktskurve mit jeder isotropen Geraden im algebraischen Sinn drei Punkte gemeinsam hat. Für „allgemeine“ KS-Büschel ist sie somit eine durch F gehende, also isotrop-zirkuläre, Kurve dritter Ordnung k^3 . Auf der isotropen Tangente t_F von k_F liegt noch ein weiterer, i. a. von F verschiedener Punkt \bar{F} von k^3 . Dieser Punkt ist der Restschnittpunkt von k^3 mit der isotropen Asymptote t_F von k^3 .

Dass die Brennpunktskurve wirklich eine Kurve dritter Ordnung ist, kann man auch auf andere Weise beweisen. Die Brennpunkte eines Kegelschnittes k_i sind bekanntlich in die Schnittpunkte seiner isotropen Tangenten mit der dem Punkt F zugeordneten Polaren. Die Polaren aller Kegelschnitte eines gegebenen KS-Büschels bezüglich des Pols F bilden ein Geradenbüschel (\bar{F}) , dessen Grundpunkt zum

Punkt F bezüglich des KS-Büschels doppelt konjugiert ist [2]. Den Punkt \bar{F} kann man z. B. als den Schnittpunkt je zwei der Polaren p_1, p_2, p_3 der drei entarteten Kegelschnitte des KS-Büschels konstruieren.

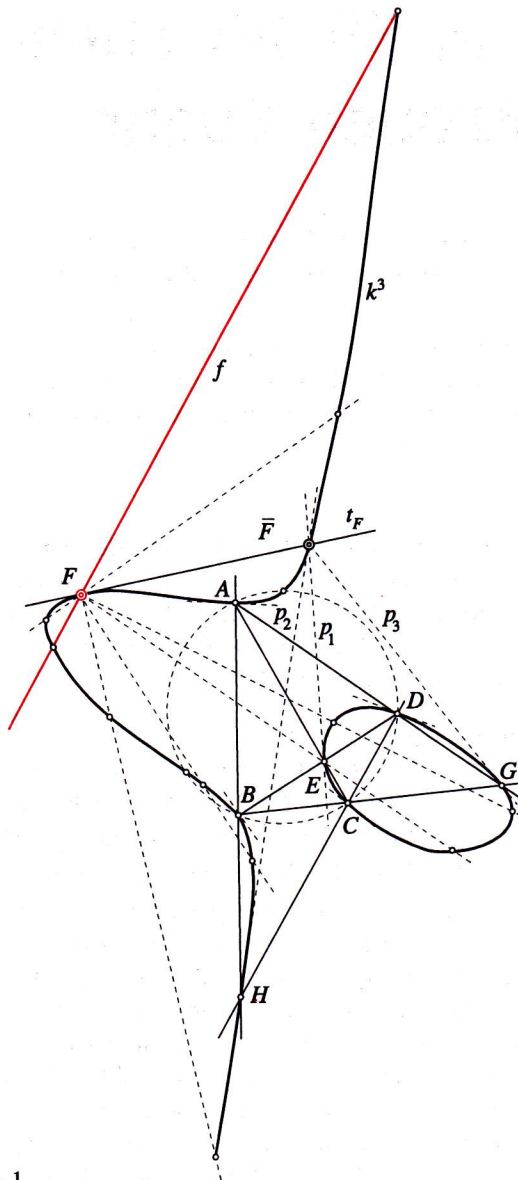


Abb. 1

In den Geradenbüscheln (F) und (\bar{F}) ordnen wir der Polaren von F bezüglich eines festen Kegelschnittes des KS-Büschels dessen zwei isotrope Tangenten zu. Das Erzeugnis dieser zwei Geradenbüschel ist also zunächst von vierter Ordnung. Weil aber die Gerade $F\bar{F}$, als die Tangente und die Polare des den Punkt F enthaltenden Kegelschnittes sich selbst zugeordnet ist, spaltet sich von dieser Kurve vierter Ordnung die Gerade $F\bar{F}$ ab, sodaß sich eine im allgemeinen irreduzible Kurve k^3 dritter Ordnung als die Brennpunktskurve des gegebenen KS-Büschels einstellt.

Die Brennpunktskurve k^3 schneidet die absolute Gerade f , ausser im absoluten Punkt F , noch in den zwei Punkten. Es

sind dies die uneigentlichen Berührungspunkte der beiden Parabeln des gegebenen KS-Büschels.

Das gegebene KS-Büschel induziert bekanntlich auf jeder Geraden g des Büschels (F), die keinen Grundpunkt enthält, eine involutorische Projektivität, die sogenannte Desargues-Involution. Genau in den Fixpunkten dieser Involution berührt g Kegelschnitte des KS-Büschels. Damit ist die Brennpunktskurve k^3 als Menge der Fixpunkte der Desargues-Involutionen auf den Geraden des Büschels (F) erklärt.

Jede Gerade g des Geradenbüschels (F) berührt im allgemeinen zwei Kegelschnitte des KS-Büschels (k_i). Im Fall, daß die Gerade $g \in (F)$ einen Grundpunkt des KS-Büschels enthält,artet die Desargues-Involution aus mit einem einzigen in den Grundpunkt fallenden Fixpunkt. Die zugehörigen berührenden Kegelschnitte des KS-Büschels sind also in einem vereinigt. Die Geraden FA, FB, FC und FD sind deswegen die isotrope Tangenten der Brennpunktskurve, also sind A, B, C, D Brennpunkte von k^3 . Da die den (nichtausgearteten) durch F gehenden Kegelschnitt $k_F \in (k_i)$ berührende isotrope Tangente zweifach zu zählen ist, und die Klasse von k^3 höchstens 6 betragen kann, sind die vier Grundpunkte A, B, C, D die einzigen eigentlichen Brennpunkten von k^3 .

Das KS-Büschel (k_i) enthält im allgemeinen unendlich viele isotropen Ellipsen und Hyperbeln, die zwei Parabeln und keinen Kreis. Enthält das gegebene KS-Büschel (k_i) einen isotropen Kreis, so besitzt die entsprechende Brennpunktskurve die absolute Gerade f als die isotrope Asymptote, und ihr Zirkularitätsgrad ist gleich zwei (Abb. 2).

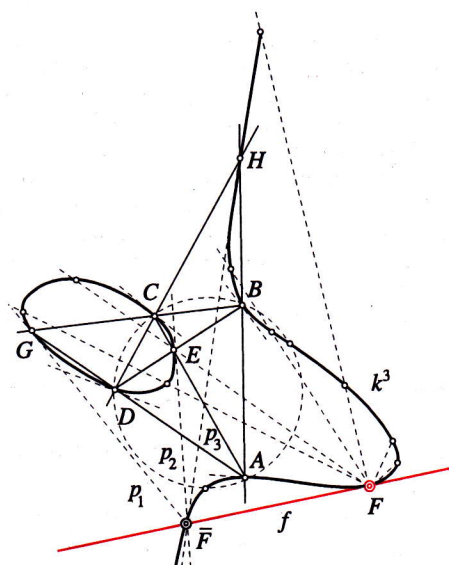


Abb. 2

Abb. 3. zeigt die Konstruktion der Brennpunktskurve eines Hyperbelbüschels. Fällt eine der Grundpunkte, etwa genau der Grundpunkt A , auf die absolute Gerade f , dann enthält

das KS-Büschel abgesehen von einer einzigen Parabel nur Hyperbeln (vgl. Abb. 3). Die Brennpunktskurve k^3 ist dann eine parabolische Kubik mit dem uneigentlichen Linienelement (A, f) .

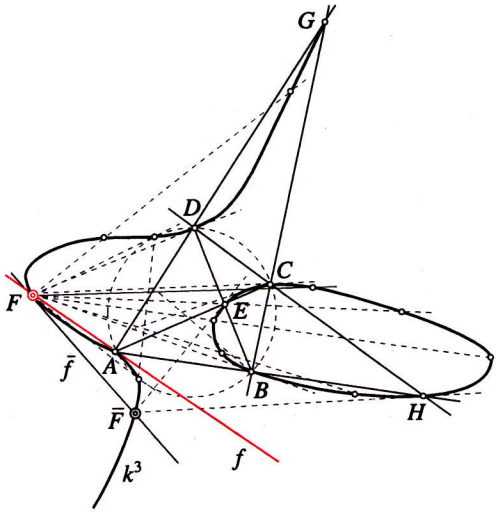


Abb. 3

Fällt der Grundpunkt A mit dem absoluten Punkt F zusammen, wird das Büschel der konfokalen speziellen Hyperbeln gegeben.

Sind zwei Grundpunkte, etwa A und B , mit der absoluten Geraden f inzident, zerfällt die Kurve k^3 in die Gerade f und einen Kegelschnitt durch C, D und die eigentlichen Diagonalschnittpunkte E und G des Grundpunktvierecks $(A; B; C; D)$ (Abb. 4).

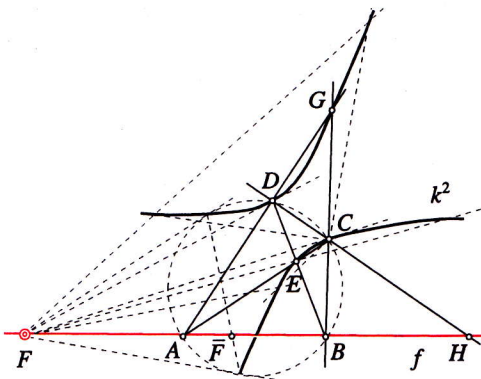


Abb. 4

Fällt der uneigentliche Diagonalschnittpunkt H dabei in den absoluten Punkt F , dann ist auch dieser Restkegelschnitt noch reduzibel, sodaß die Brennpunktskurve dann aus f und den Geraden CD und EG besteht.

Ein Zerfall der Brennpunktskubik tritt auch dann ein, wenn eine der sechs Seiten des Grundpunktvierecks, etwa AB , isotrop ist ohne daß dabei Grundpunkte auf der absoluten Geraden f zu liegen brauchen (Abb. 5). Auch in diesem

Fall entartet die Brennpunktskurve auf die isotrope Gerade AB und einen Kegelschnitt durch C, D und die nicht auf AB liegenden Diagonalecken E und G . Im Fall, daß die auf AB liegende Diagonalecke H mit dem absoluten Punkt F übereinstimmt, zerfällt k^3 in die drei Geraden AB, CD und EG .

Die Diskussion der übrigen Typen von KS-Büscheln (z. B. Berührbüschel, Oskulationsbüschel, Hyperoskulationsbüschel) hinsichtlich ihrer möglichen Brennpunktskurven kann nach dem verstehenden Muster erfolgen und wird deshalb dem Leser überlassen.

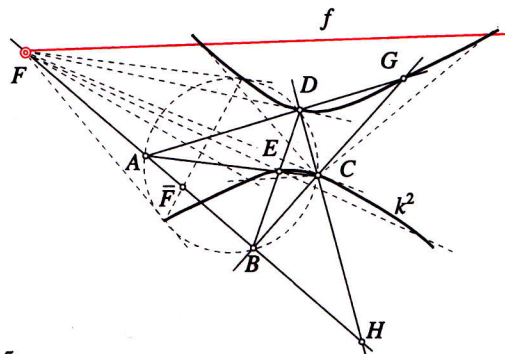


Abb. 5

Für KS-Scharen mit vier verschiedenen, reellen Grundtangente m, n, p, q gilt

Satz 2.

Die Brennpunktskurve einer allgemeinen KS-Schar der isotropen Ebene ist eine rationale Kubik.

Beweis. Eine KS-Schar (k^i) möge „allgemein“ heißen, wenn sie ein Grundtangentevierseit besitzt, dessen Seiten und Diagonalen bzw. dessen sechs Ecken fremd zum absoluten Linienelement (F, f) liegen. Jede isotrope Gerade $t \in (F)$ ist Tangente genau eines Kegelschnittes einer solchen KS-Schar, jedem Kegelschnitt sind nämlich wieder zwei isotrope Tangente, also auch zwei Brennpunkte zugeordnet, sodaß eine (1,2)-Korespondenz zwischen den Kegelschnitten der Schar und den isotropen Geraden vorliegt.

Der absolute Punkt F gehört zwei Scharkegelschnitten an. Für diese beiden Kegelschnitte ist F jeweils der einzige Brennpunkt, sodaß die gesuchte Brennpunktskurve in F einen Doppelpunkt besitzt und dort die beiden Scharkegelschnitte berührt.

Weil jede isotrope Gerade außer dem Doppelpunkt F noch einen weiteren Brennpunkt trägt, folgt damit, daß die Brennpunktskurve eine rationale Kubik oder eine reduzible Kurve 3. Ordnung sein muß.

Diesen Satz kann man auch auf andere Weise beweisen. Nämlich, die Brennpunkte jedes Kegelschnittes $k \in (k^i)$ sind die Schnittpunkte seiner isotropen Tangente $t_1, t_2 \in (F)$ mit seiner dem Punkt F zugeordneten Polare.

Alle dem Punkt F zugeordnete Polaren bezüglich aller Kegelschnitte der KS-Schar (k^i) bilden eine Kurve (p_k) zweiter Klasse. Ordnen wir das Geradenbüschel (F) und diese Polarkurve (p_k) so zu, dass die Tangenten und Polaren der gleichen Kegelschnitte der KS-Schar (k^i) zugeordnet sind, wird das Erzeugnis dieser zwei Geradenmengen eine Kurve fünfter Ordnung (nach Chasles) [1]. Weil aber die Tangenten $t_1, t_2 \in (F)$ der beiden den Punkt F enthaltenden Kegelschnitte als die Polaren der gleichen Kegelschnitte sich selbst zugeordnet sind, entartet diese Kurve fünfter Ordnung in diese zwei isotropen Geraden t_1 und t_2 und eine Kurve dritter Ordnung k^3 , die die gesuchte Brennpunktskurve der gegebenen KS-Schar ist.

Die Kurve k^3 enthält die Schnittpunkte $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ der Grundtangente m, n, p und q , weil diese Punktepaare die Brennpunkte der entarteten Kegelschnitte der KS-Schar sind.

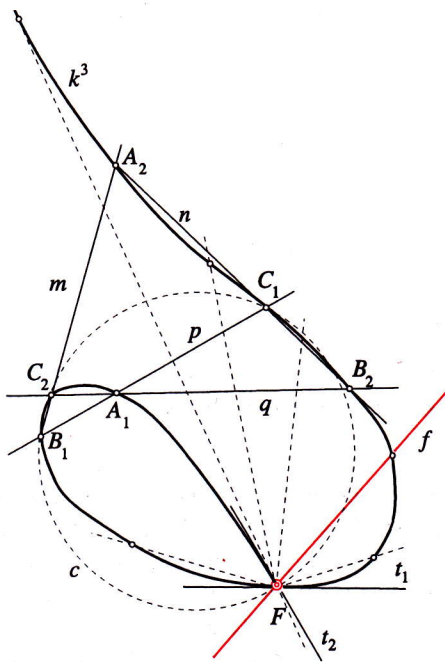


Abb. 6

In Abb. 6. wurde die Brennpunktskurve k^3 als die Menge der Berührungspunkte von Scharkegelschnitten mit isotropen Tangente $t \in (F)$ mittels Brianchons Theorem, also linear, konstruiert. Im Doppelpunkt F wurden die Tangente t_1 und t_2 der Brennpunktskurve k^3 als die Doppelstrahlen der von (k^i) in (F) induzierten Desargues-Involution konstruiert. Diese Konstruktion wurde mittels des Steiner Kreises c durchgeführt [2].

Die in Abb. 6. gegebene KS-Schar enthält unendlich viele Ellipsen und Hyperbeln, zwei spezielle Hyperbeln und nur eine Parabel. Ist diese einzige Parabel ein isotroper Kreis, wird die Brennpunktskurve vollständig isotrop-zirkulär. Die absolute Gerade ist nämlich ihre Tangente im absoluten Punkt (Abb. 7).

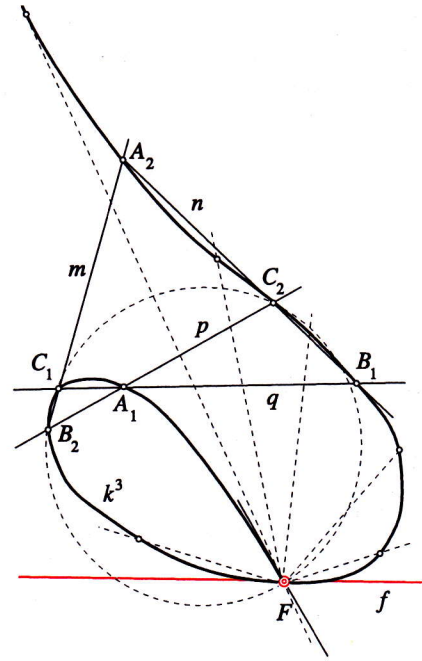


Abb. 7

Im Fall, dass eine der Grundtangente der KS-Schar die absolute Gerade f ist, z. B. $f = m$, enthält die KS-Schar nur Parabeln (Abb. 8). Jede Parabel dieser Schar hat einen Brennpunkt auf der absoluten Gerade f und deswegen entartet die Brennpunktskurve in diese Gerade und einen die eigentliche Schnittpunkte der Grundtangente enthaltenden Kegelschnitt k^2 . Weil eine solche KS-Schar (k^i) immer einen Kreis enthält und dessen beide Brennpunkte mit dem absoluten Punkt zusammenfallen, berührt die Brennpunktskurve die absolute Gerade in dem absoluten Punkt F , ist also ein isotroper Kreis. (Vgl. den analogen Fall einer Parabelschar in einer euklidischen Ebene [3]).

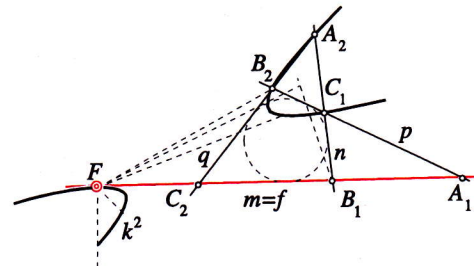


Abb. 8

Im Fall, dass eine der Grundtangente der KS-Schar eine isotrope Gerade ist, entartet die Brennpunktskurve in diese isotrope Gerade und einen Kegelschnitt, der die Schnittpunkte der nichtisotropen Grundtangente enthält (Abb. 9). Sind zwei der Grundtangente isotrop, so zerfällt die Brennpunktskurve in diese beiden Grundtangente und

in die isotrope Gerade g durch den Schnittpunkt C_1 der beiden nichtisotropen Grundtangente. Diese Gerade g stellt nämlich die durch das Eckenpaar $(C_1, C_2 = F)$ repräsentierte, singuläre Kurve 2. Klasse dar, für die also jeder Punkt von g als Brennpunkt aufgefaßt werden muß.

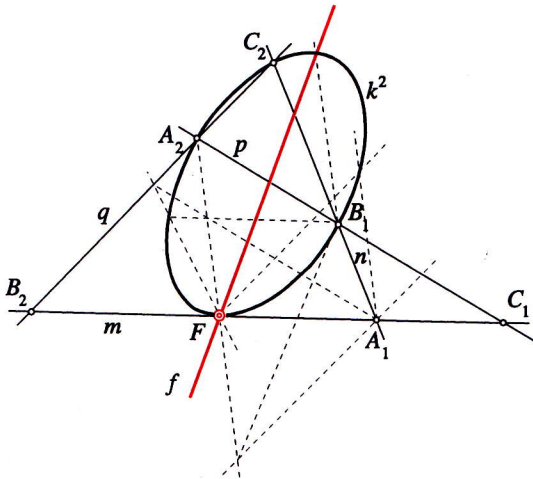


Abb. 9

Literatur

- [1] MÜLLER, E.; KRAMES, L.: *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, Band III, Leipzig–Wien, 1931.
- [2] NIČE, V.: *Uvod u sintetičku geometriju*, Školska knjiga, Zagreb, 1956.
- [3] SLIEPČEVIĆ, A.: *Žarišne krivulje u pramenovima krivulja u realnoj projektivnoj, hiperboličkoj i izotropnoj ravnini*, doktorska disertacija, Zagreb, 1998.

In der Abb. 10. ist eine KS-Schar mit zwei Paaren parallelen Grundtangente dargestellt. Die zugehörige Brennpunktskurve zerfällt in die Gerade f und einen Kegelschnitt, der die eigentlichen Schnittpunkte der Grundtangente wie auch den absoluten Punkt F enthält und durch diese Angabe festgelegt ist.

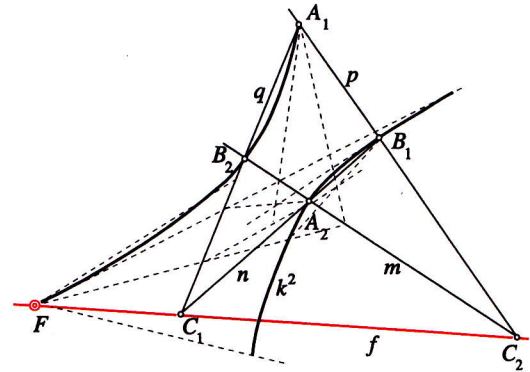


Abb. 10

Auch im Fall der KS-Scharen muß die Diskussion weiteren, projektiv-spezialer Typen von KS-Scharen dem Leser überlassen werden.

- [4] ŠČURIĆ-ČUDOVAN, V.: Zur Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene, I. Teil, *Rad JAZU*, [450] 9 (1990), 41–51.

Dr. sc. Ana Sliepčević
 Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
 10 000 Zagreb, Kačićeva 26
 tel/fax: +385(01) 66 00 642
 e-mail: anaslie@juraj.gradnz.grad.hr

Stručni rad

Prihvaćeno 20. 12. 1998.

MILJENKO LAPAINE I MIROSLAVA LAPAINE

Krivulja središta pramena konika

Curve of Centres of the Conic Section Pencil

ABSTRACT

The paper defines the centre of conic section and the curve of centres of the conic section pencil. A classification of conic section pencils is given, related to the elliptic, parabolic and hyperbolic type of curves included in the pencil. The equation of the curve of centres of the conic section pencil is derived and illustrated by number of examples.

Key words: centre of the conic section, conic section pencil, curve of centres of the conic section pencil

Krivulja središta pramena konika

SAŽETAK

U radu se definira središte konike i krivulja središta pramena konika. Daje se klasifikacija pramena konika s obzirom na eliptičke, paraboličke i hiperboličke krivulje u pramenu. Izvodi se jednačba krivulje središta pramena konika i ilustrira većim brojem primjera.

Ključne riječi: središte konike, pramen konika, krivulja središta pramena konika

1. Uvod

Krivulje drugoga reda ili konike obično se dijele na centralne i necentralne. U radu Lapainea i Jovičića (1996) prikazana je jedna detaljna klasifikacija konika u kojoj se konike najprije dijele na centralne i necentralne, a zatim na njihove podtipove.

Zbog čega se neke konike nazivaju centralnima, a druge necentralnima? Najopćenitija jednačba drugog stupnja od dviju varijabli x i y može se napisati u obliku

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (1.1)$$

gdje su a, b, c, d, e i f realni brojevi, i barem jedan od a, b i c različit od nule. Geometrijsko mjesto točaka (x, y) u ravnini čije koordinate zadovoljavaju jednačbu (1.1) naziva se krivuljom drugoga reda, konusnim presjekom, konikom ili čunjosečnicom. Ako je skup točaka (x, y) koje zadovoljavaju jednačbu (1.1) centralno simetričan s obzirom na

neku točku $S(x_S, y_S)$, onda za svaku točku (x, y) koja zadovoljava (1.1) mora postojati točka (x', y') , koja također zadovoljava (1.1), tako da vrijedi

$$x_S = \frac{x + x'}{2}, \quad y_S = \frac{y + y'}{2}, \quad (1.2)$$

odnosno

$$x' = 2x_S - x, \quad y' = 2y_S - y. \quad (1.3)$$

Ako točka (x', y') pripada konici, odnosno ako njezine koordinate zadovoljavaju (1.1), tada je

$$F(x', y') = 0, \quad (1.4)$$

dakle

$$F(2x_S - x, 2y_S - y) = 0, \quad (1.5)$$

što je ekvivalentno s

$$F(x, y) + 4(ax_S^2 + 2bx_Sy_S + cy_S^2 + dx_S + ey_S) - 4x(ax_S + by_S + d) - 4y(bx_S + cy_S + e) = 0. \quad (1.6)$$

Budući da je

$$F(x, y) = 0$$

i

$$\begin{aligned} ax_S^2 + 2bx_Sy_S + cy_S^2 + dx_S + ey_S = \\ = x_S(ax_S + by_S + d) + y_S(bx_S + cy_S + e), \end{aligned}$$

to se (1.6) može napisati u obliku

$$\begin{aligned} (x - x_S)(ax_S + by_S + d) + \\ + (y - y_S)(bx_S + cy_S + e) = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

No kako (1.7) mora vrijediti za svaki par (x, y) koji zadovoljava (1.1), to zaključujemo da je (1.7) ekvivalentno s

$$\begin{aligned} ax_S + by_S + d = 0, \\ bx_S + cy_S + e = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Kako bi sustav (1.8) imao jedinstveno rješenje, mora biti

$$ac - b^2 \neq 0 \quad (1.9)$$

i tada je

$$x_S = \frac{be - cd}{ac - b^2}, \quad y_S = \frac{bd - ae}{ac - b^2}. \quad (1.10)$$

Točku S s koordinatama (x_S, y_S) nazivamo središtem ili centrom konike. Ako konika ima *jedinstveno* središte, naziva se centralnom. U radu (Lapaine i Jovičić, 1996, str. 21) do istog smo zaključka došli na drugi način.

Napomenimo da koniku koja se raspala u par paralelnih pravaca ili koja je jedan dvostruki pravac ne ubrajamo u centralne konike, iako svaka od njih ima centar simetrije. Međutim, taj centar simetrije nije jedinstven.

2. Pramen konika

Neka su

$$F(x, y) = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0, \quad (2.1)$$

$$G(x, y) = a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2 = 0, \quad (2.2)$$

jednadžbe dviju konika. Za proizvoljni $\mu \in \mathbb{R}$ sastavimo izraz

$$H(x, y) = F(x, y) + \mu G(x, y). \quad (2.3)$$

Polinom H je oblika

$$H(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \quad (2.4)$$

gdje smo označili

$$a = a_1 + \mu a_2, \dots, f = f_1 + \mu f_2. \quad (2.5)$$

Za svaki pojedini $\mu \in \mathbb{R}$, izraz

$$H(x, y) = F(x, y) + \mu G(x, y) = 0 \quad (2.6)$$

je jednadžba konike ako je barem jedan od brojeva a, b i c različit od nule. Za zadane realne brojeve $a_1, b_1, \dots, f_1, a_2, b_2, \dots, f_2$ i $\mu \in \mathbb{R}$ skup svih konika obuhvaćenih jednadžbom (2.6) naziva se pramen konika. Konike s pomoću kojih je pramen definiran i kojima odgovaraju jednadžbe

$$F(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad G(x, y) = 0$$

nazivaju se osnovnim konikama pramena.

Za svaki čvrsti $\mu \in \mathbb{R}$ jednadžba (2.4) predstavlja jednu krivulju iz pramena ili u specijalnom slučaju prazan skup. Prema Lapaineu (1997) tip krivulje ovisit će ponajprije o svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2 matrice

$$\delta = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Osim podjele na centralne i necentralne, konike je moguće podijeliti i na druge načine. Primjerice, u skladu s (Lapaine i Jovičić, 1996), uz pretpostavku da matrica δ nije nulmatrica, ovisno o predznaku njezine determinante, prirodno je konike klasificirati na sljedeći način:

- eliptička konika, ako je $\det(\delta) > 0$,
- parabolička konika, ako je $\det(\delta) = 0$,
- hiperbolička konika, ako je $\det(\delta) < 0$.

Determinanta matrice δ iz (2.7) je

$$\det(\delta) = \lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2 = m\mu^2 + n\mu + p, \quad (2.8)$$

gdje smo označili

$$\begin{aligned} m &= a_2c_2 - b_2^2, \\ n &= a_1c_2 + c_1a_2 - 2b_1b_2, \\ p &= a_1c_1 - b_1^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Označimo još diskriminantu kvadratne funkcije (2.8) s

$$D = n^2 - 4mp.$$

Determinanta matrice δ iz (2.8) jednaka je nuli u sljedećim slučajevima:

1. za svaki $\mu \in \mathbb{R}$, ako je $m = 0, n = 0, p = 0$;
2. ni za koji $\mu \in \mathbb{R}$, ako je $m = 0, n = 0, p \neq 0$ ili $m \neq 0, D < 0$;
3. za $\mu = -p/n$, ako je $m = 0, n \neq 0$;
4. za $\mu = -n/2m$, ako je $m \neq 0, D = 0$;
5. za $\mu_{1,2} = (-n \pm \sqrt{D})/2m$, ako je $m \neq 0, D > 0$.

Odatle možemo zaključiti da u pramenu konika ne može biti proizvoljan broj konika paraboličkoga tipa, nego takve mogu biti samo sve (slučaj 1), niti jedna (slučaj 2), jedna (slučajevi 3 i 4) ili dvije konike (slučaj 5).

Na temelju spomenute analize može se izvesti klasifikacija pramenova konika s obzirom na sadržavanje konika eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog tipa. Takva je klasifikacija prikazana u tablici 1.

3. Krivulja središta pramena konika

U ovome nas radu zanimaju centralne konike nekog pramena. Neka je zadan pramen (2.3) s osnovnim konikama (2.1) i (2.2). Označimo

$$\begin{aligned} a_S &= a_1b_2 - b_1a_2, \\ 2b_S &= a_1c_2 - c_1a_2, \\ c_S &= b_1c_2 - c_1b_2, \\ 2d_S &= a_1e_2 - b_1d_2 + d_1b_2 - e_1a_2, \\ 2e_S &= b_1e_2 - c_1d_2 + d_1c_2 - e_1b_2, \\ f_S &= d_1e_2 - e_1d_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dokazat ćemo sljedeći

Teorem.

Neka je zadan pramen konika (2.3) s osnovnim konikama (2.1) i (2.2). Koordinate središta (x_S, y_S) svih centralnih konika iz pramena (2.3) zadovoljavaju jednadžbu

$$a_Sx_S^2 + 2b_Sx_Sy_S + c_Sy_S^2 + 2d_Sx_S + 2e_Sy_S + f_S = 0. \quad (3.2)$$

Tablica 1. Pregled mogućih tipova pramenova konika uz pretpostavku da δ nije nul–matrica

$m = 0$	$n = 0$	sve su krivulje pramena eliptičke za $p > 0$
		sve su krivulje pramena paraboličke za $p = 0$
		sve su krivulje pramena hiperboličke za $p < 0$
$m > 0$	$n \neq 0$	pramen sadrži eliptičke krivulje za $\mu > -p/n$
		paraboličku krivulju za $\mu = -p/n$
		hiperboličke krivulje za $\mu < -p/n$
$m < 0$	$D > 0$	pramen sadrži eliptičke krivulje za $\mu \in (-\infty, \mu_1) \cup (\mu_2, +\infty)$
		paraboličke krivulje za $\mu = \mu_1, \mu = \mu_2$
		hiperboličke krivulje za $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$
$m < 0$	$D = 0$	pramen sadrži eliptičke krivulje za $\mu \neq -n/2m$
		paraboličku krivulju za $\mu = -n/2m$
		sve krivulje pramena su eliptičke
$m < 0$	$D < 0$	pramen sadrži hiperboličke krivulje za $\mu \in (-\infty, \mu_1) \cup (\mu_2, +\infty)$
		paraboličke krivulje za $\mu = \mu_1, \mu = \mu_2$
		eliptičke krivulje za $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$
$m < 0$	$D = 0$	pramen sadrži hiperboličke krivulje za $\mu \neq -n/2m$
		paraboličku krivulju za $\mu = -n/2m$
		sve krivulje pramena su hiperboličke

Dokaz. Ako je za neki čvrsti μ konika $H(x, y) = 0$ centralna, tada koordinate njezina središta S moraju zadovoljavati sustav jednadžbi (1.8). Izrazimo li koeficijente a, b, c, d, e iz (1.8) s pomoću a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 i a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 primjenjujući (2.5) te nakon toga eliminiramo parametar μ , dobit ćemo (3.2) i time je teorem dokazan.

Na temelju dokazanog teorema možemo zaključiti da je skup svih središta pramena konika opet jedna konika ako je barem jedan od koeficijenata a_S, b_S, c_S različit od nule. Skup svih središta nekog pramena konika ne može biti imaginarna konika. Naime, ako središte neke konike iz pramena postoji, njegove su koordinate (1.10) rješenje sustava linearnih jednadžbi (1.8), a to su realni brojevi, jer su takvi svi koeficijenti sustava (1.8).

U sljedećem će se poglavlju pokazati na primjerima da realne konike svih mogućih tipova mogu biti krivulje središta nekog pramena konika.

4. Primjeri

Svi primjeri koji slijede ilustrirani su crtežima izrađenim s pomoću računala. Debljom su crtom izvučene osnovne konike pramena, a crvenom je crtom prikazana krivulja središta pramena.

Da bi se dobili „lijepi“ primjeri trebalo je za zadane a_S, b_S, c_S, d_S, e_S i f_S riješiti nelinearan sustav (3.1).

Primjer 1.

Zadan je pramen konika

$$F(x, y) + \mu G(x, y) = 0,$$

gdje su osnovne konike pramena,

$$F(x, y) = x^2 - y^2 + 2y - 2 = 0,$$

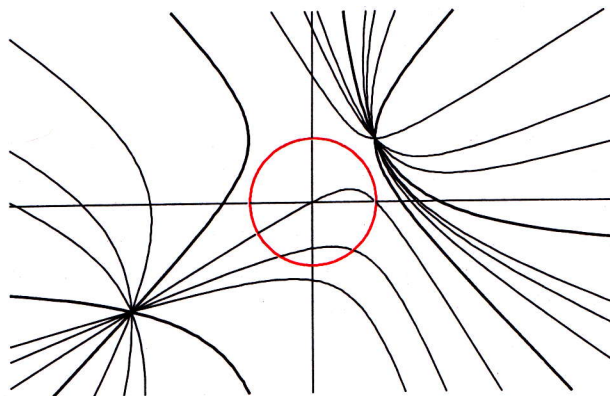
$$G(x, y) = xy + x - 2 = 0,$$

dvije hiperbole. Prva ima središte u točki $(0, 1)$, a druga u točki $(0, -1)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1/4, n = 0, p = -1$ i $D = -1 < 0$, pa možemo zaključiti da je determinanta pramena δ uvijek negativna, što znači da su sve konike pramena hiperboličkoga tipa. Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta pramena:

$$a_S = 0.5, b_S = 0, c_S = 0.5,$$

$$d_S = 0, e_S = 0, f_S = -0.5.$$

To znači da je krivulja središta kružnica $x^2 + y^2 = 1$ (vidi sliku 1).



Slika 1: Pramen $x^2 - y^2 + 2y - 2 + \mu(xy + x - 2) = 0$ kojemu je krivulja središta kružnica

Primjer 2.

Zadan je pramen konika $F(x, y) + \mu G(x, y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$$F(x, y) = x^2 - 4y^2 - 4x - 2 = 0,$$

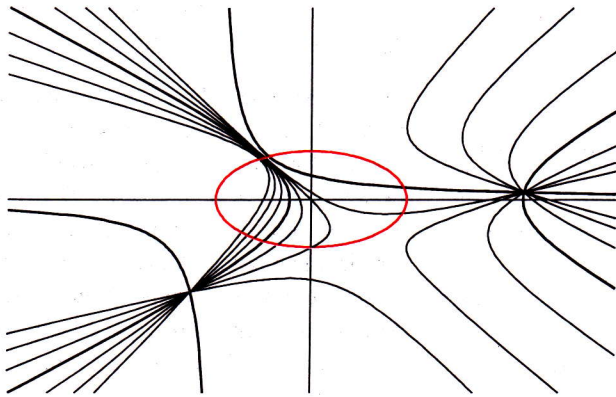
$$G(x, y) = xy + 2y - 1 = 0,$$

dvije hiperbole. Prva ima središte u točki $(2, 0)$, a druga u točki $(-2, 0)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1/4, n = 0, p = -4$ i $D = -4 < 0$, pa možemo zaključiti da je determinanta pramena δ uvijek negativna, što znači da su sve konike pramena hiperboličkoga tipa. Pre-

ma (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta pramena:

$$a_S = 0.5, b_S = 0, c_S = 2, d_S = 0, e_S = 0, f_S = -2.$$

To znači da je krivulja središta elipsa $x^2 + 4y^2 = 4$ (vidi sliku 2).



Slika 2: Pramen $x^2 - 4y^2 - 4x - 2 + \mu(xy + 2y - 1) = 0$ kojemu je krivulja središta elipsa

Primjer 3.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$$F(x,y) = x^2 - y^2 + 2 = 0,$$

$$G(x,y) = xy - 1 = 0,$$

dvije hiperbole. Obje imaju središte u točki (0,0). Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1/4, n = 0, p = -1$ i $D = -1 < 0$, pa možemo zaključiti da je determinanta pramena δ uvijek negativna, što znači da su sve konike pramena hiperboličkoga tipa. Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta pramena:

$$a_S = 0.5, b_S = 0, c_S = 0.5, d_S = 0, e_S = 0, f_S = 0.$$

To znači da su središta svih konika pramena u jednoj te istoj točki, ishodištu koordinatnog sustava (vidi sliku 3).

Primjer 4.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

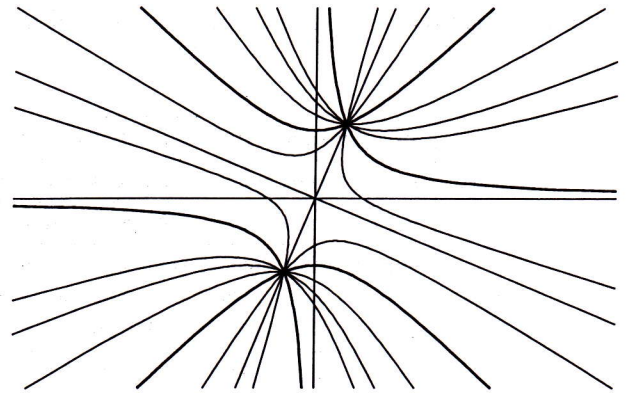
$$F(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4x - 8 = 0,$$

$$G(x,y) = xy + 2y - 6 = 0,$$

elipsa i hiperbola. Središte elipse je u točki (2,0), a hiperbole u točki (-2,0). Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1/4, n = 0, p = 4$ i $D = 4 > 0$, što znači da su konike pramena različitih tipova. Za $\mu_1 = -4$ i $\mu_2 = 4$ imamo dvije parabole u pramenu:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 16 = 0,$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 8y - 32 = 0.$$

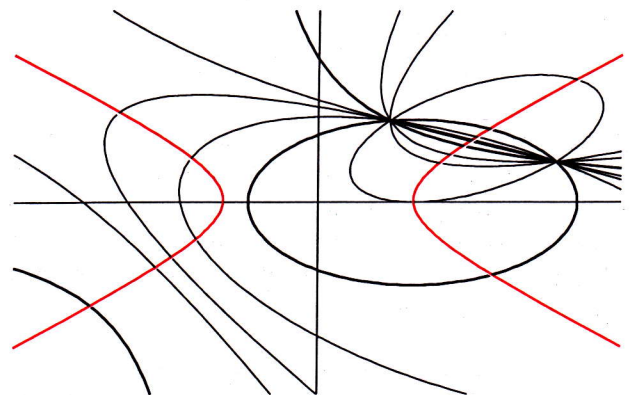


Slika 3: Pramen $x^2 - y^2 + 2 + \mu(xy - 1) = 0$ kojemu je krivulja središta jedna točka

Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta:

$$a_S = 0.5, b_S = 0, c_S = -2, d_S = 0, e_S = 0, f_S = -2.$$

To znači da je krivulja središta hiperbola $x^2 - 4y^2 = 4$ (vidi sliku 4).



Slika 4: Pramen $x^2 + 4y^2 - 4x - 8 + \mu(xy + 2y - 6) = 0$ kojemu je krivulja središta hiperbola

Primjer 5.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 15 = 0,$$

$$G(x,y) = 2xy + 2x - 2y - 3 = 0,$$

kružnica i hiperbola. Središte kružnice je u točki (-1, 1), a hiperbole u točki (1, -1). Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1, n = 0, p = 1$ i $D = 4 > 0$, što znači da su konike pramena različitih tipova. Za $\mu_1 = -1$ radi se o paru paralelnih pravaca

$$(x - y - 2\sqrt{3})(x - y + 2\sqrt{3}) = 0.$$

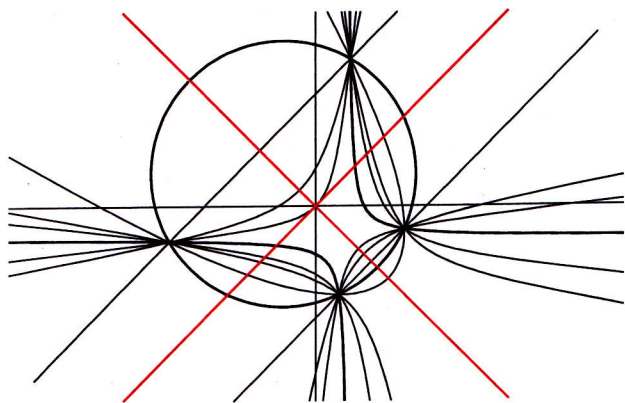
dok je za $\mu_2 = 1$ riječ o paraboli:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 4y - 18 = 0.$$

Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta pramena:

$$a_S = 1, b_S = 0, c_S = -1, d_S = 0, e_S = 0, f_S = 0.$$

To znači da je krivulja središta par ukrštenih pravaca $x^2 - y^2 = 0$ (vidi sliku 5).



Slika 5: Pramen $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 15 + \mu(2xy + 2x - 2y - 3) = 0$ kojemu dva ukrštena pravca čine krivulju središta

Primjer 6.

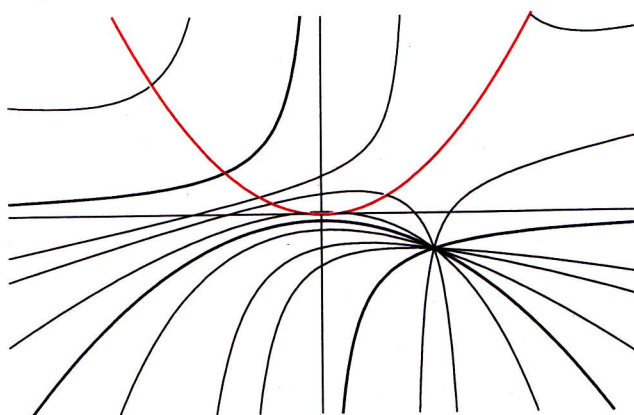
Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$$F(x,y) = x^2 + 16y + 4 = 0,$$

$$G(x,y) = xy + 5 = 0,$$

parabola i hiperbola sa središtem u točki $(0,0)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1/4$, $n = 0$, $p = 0$ i $D = 0$, što znači da su sve konike pramena hiperboličkoga tipa, osim za $\mu = 0$, kada se radi o paraboli

$$x^2 + 16y + 4 = 0.$$



Slika 6: Pramen $x^2 + 16y + 4 + \mu(xy + 5) = 0$ kojemu je parabola krivulja središta

Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta:

$$a_S = 0.5, b_S = 0, c_S = 0, d_S = 0, e_S = -4, f_S = 0.$$

To znači da je krivulja središta parabola $x^2 - 8y = 0$ (vidi sliku 6).

Primjer 7.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$$F(x,y) = x^2 + 2x - 16 = 0,$$

$$G(x,y) = xy - y - 6 = 0,$$

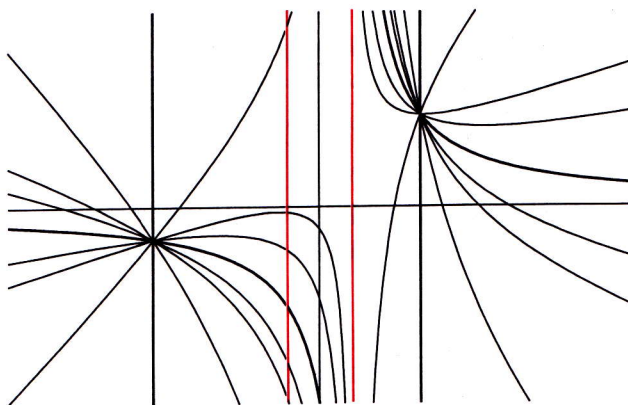
par paralelnih pravaca i hiperbola sa središtem u točki $(1,0)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1/4$, $n = 0$, $p = 0$ i $D = 0$, što znači da su sve konike pramena hiperboličkoga tipa, osim za $\mu = 0$, kada se radi o dva paralelna pravca

$$x^2 + 2x - 16 = 0.$$

Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta pramena:

$$a_S = 0.5, b_S = 0, c_S = 0, d_S = 0, e_S = 0, f_S = -0.5.$$

To znači da je krivulja središta pramena par paralelnih pravaca $x^2 = 1$ (vidi sliku 7).



Slika 7: Pramen $x^2 + 2x - 16 + \mu(xy - y - 6) = 0$ kojemu par paralelnih pravaca čini krivulju središta

Primjer 8.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$$F(x,y) = x^2 - 4 = 0,$$

$$G(x,y) = x^2 - 2xy - 4 = 0,$$

par paralelnih pravaca i hiperbola sa središtem u točki $(0,0)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1$, $n = 0$,

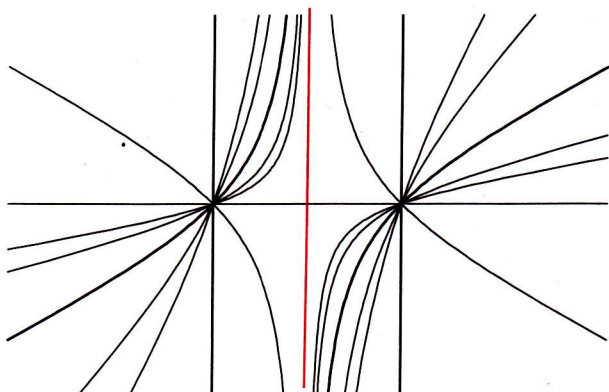
$p = 0$ i $D = 0$, što znači da su sve konike pramena hiperboličkoga tipa, osim za $\mu = 0$, kada se radi o paru paralelnih pravaca

$$x^2 - 4 = 0.$$

Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta pramena:

$$a_S = -1, b_S = 0, c_S = 0, d_S = 0, e_S = 0, f_S = 0.$$

To znači da je krivulja središta dvostruki pravac $x^2 = 0$, odnosno dvostruka os y (vidi sliku 8).



Slika 8: Pramen $x^2 - 4 + \mu(x^2 - 2xy - 4) = 0$ kojemu je dvostruki pravac krivulja središta

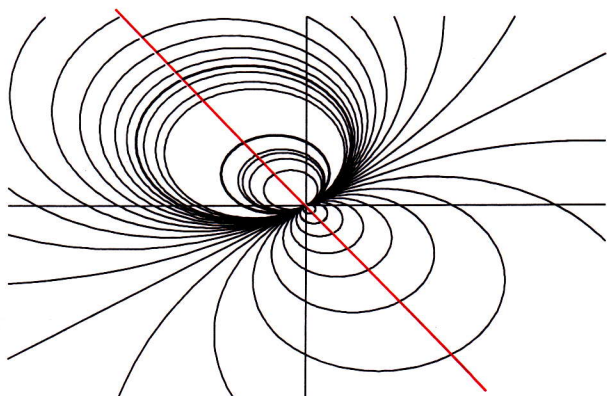
Primjer 9.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$$F(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2x - 4y = 0,$$

$$G(x,y) = x^2 + 2y^2 + x - 2y = 0,$$

dvije elipse sa središtima u točki $(-1,1)$, odnosno $(-1/2, 1/2)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = 2$,



Slika 9: Pramen $x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + \mu(x^2 + 2y^2 + x - 2y) = 0$ kojemu krivulja središta svih konika nije konika nego jednostruki pravac

$n = 4$, $p = 2$ i $D = 0$, što znači da su sve konike pramena elipse, osim za $\mu = -1$, kad odgovarajuća krivulja pramena nije konika nego pravac $x - 2y = 0$.

Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta:

$$a_S = 0, b_S = 0, c_S = 0, d_S = -1, e_S = -1, f_S = -1.$$

To znači da je krivulja središta svih konika pramena pravac $2x + 2y + 1 = 0$ (vidi sliku 9).

Primjer 10.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$$F(x,y) = x^2 + 2x + 2y = 0,$$

$$G(x,y) = x^2 + 3x + 2y = 0,$$

dvije parabole. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$ i $D = 0$, što znači da su u pramenu sve konike parabolikoga tipa, tj. nema ni jedne centralne konike. Prema tome, taj pramen nema krivulje središta.

Prema (3.1) odredimo koeficijente:

$$a_S = 0, b_S = 0, c_S = 0, d_S = 0, e_S = 0, f_S = -1/2,$$

što zbog $-1/2 \neq 0$ još jedanput potvrđuje da krivulja središta ne postoji.

Zahvala. Autori najsrdačnije zahvaljuju mr. sc. Jeleni Beban-Brkić na korisnim savjetima koji su pomogli da se početni rukopis transformira u bolji i pregledniji rad.

Literatura

- [1] LAPAINE, M.; JOVIČIĆ, D. (1996): Grafički prikazi konika pomoću računala, *KoG* 1, 19–26.
- [2] LAPAINE, M. (1997): Grafički prikaz pramena konika pomoću računala, *KoG* 2, 43–47.

Doc. dr. sc. Miljenko Lapaine, dipl. inž. mat.
Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet
10 000 Zagreb, Kačićeva 26
tel.: 45 61 273, faks: 48 28 081
e-mail: mlapaine@public.srce.hr

Mr. sc. Miroslava Lapaine, dipl. inž. elekt.
10 000 Zagreb, Ilica 164
tel.: 37 04 628

U povodu 100. obljetnice deskriptivne geometrije na zagrebačkom Sveučilištu

Moglo bi se reći da smo narod koji voli obljetnice. Ali, kada se u jednoj godini, kao što je ova, dogodi toliko "okruglih obljetnica" vezanih uz geometriju, posebno uz nacrtnu geometriju, geometričari bi se trebali čak osjećati dužnima da to na neki način obilježe. Ako se tome još doda činjenica da se ove godine obilježava dvjesto godina od objavljivanja prvog udžbenika iz nacrtne geometrije (Gaspard Monge, "Geometrie descriptive", Paris, 1798), primjereno je povezati ova događanja kod nas i u svijetu. Ovaj je članak samo jedan pokušaj da se ožive sjećanja na istaknute, geometrijom označene godine, događanja i ljude koji zaslužuju da ih se sjetimo barem svakih 10, 50, 100,... godina.

- 330 godina od osnutka zagrebačkog Sveučilišta...
- 125 godina modernog zagrebačkog Sveučilišta...

Iako je zagrebačko Sveučilište, kao najstarije u Hrvatskoj, osnovano davne 1669. godine, godinom osnutka modernog sveučilišta u Zagrebu smatramo godinu 1874., kada su osnovana 4 fakulteta: bogoslovni, pravoslovni i državoslovni, liječnički te mudroslovni. Na mudroslovnom fakultetu postojala su dva odjela: filozofično-historijski i matematičko-prirodoslovni. Premda je odmah osnovana katedra za matematiku, nastavni je rad na njoj započeo tek 1876., kada je Čeh dr. Karel Zahradnik imenovan njezinim prvim javnim redovitim profesorom. Stoga se ta godina obilježava kao početak moderne visokoškolske nastave matematike u Hrvatskoj. Godine 1900. tiskana je, u povodu 25. obljetnice postojanja Sveučilišta, "Spomenica kraljevskog sveučilišta Franje Josipa I u Zagrebu", iz koje je vidljivo da je na Mudroslovnom fakultetu na učiteljskim ispitima bilo šest tzv. ispitnih skupina koje su sadržavale matematiku, a jedna od njih bila je skupina *matematika i opisno mjerstvo*, u kojoj su oba predmeta tretirana kao glavna. Do 1900. u toj su skupini održana samo četiri učiteljska ispita.

- 150. obljetnica rođenja utemeljitelja visokoškolske matematike u Hrvata...
- prije 110 godina obranjena je prva disertacija iz geometrije...
- prije 100 godina prvi se put predaje geometrijski kolegij na Sveučilištu...

Karel Zahradnik rođen je 16. 4. 1848. u Lytomišlu u Češkoj. Za njegova 22-godišnjeg boravka u Zagrebu (1876.-1898.) mnogo se toga događalo u matematici, a posebno u geometriji. Zahradnik je dugo bio jedini profesor matematike na katedri za matematiku Mudroslovnog fakulteta, pa se bavio raznim područjima matematike. Poznato je da je bio posebno sklon geometriji, a najmilija mu je bila teorija algebarskih krivulja, posebno racionalnih.

Šk. god. 1897./98. Zahradnik prvi put na Mudroslovnom fakultetu predaje geometrijski kolegij *O ploha i krivuljama u prostoru*. Bavio se i znanstvenim radom, objavio niz znanstvenih radova u RADU Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti (JAZU osnovana 1868.), bio njezin dopisni, a zatim i redoviti član, pa ga smatramo i utemeljiteljem znanstvenog rada iz matematike. Bio je prvi predstojnik matematično-prirodoslovnog razreda Akademije, a za njegova boravka u Zagrebu bile su na Mudroslovnom fakultetu obranjene i prve doktorske disertacije iz matematike. Zanimljivo je da su teme tih disertacija bile geometrijskog sadržaja. Prvi je doktorirao David Segen 1889. (*O asteroidi*), pa Vladimir Varičak 1891. (*Teorija nožišnih krivulja*), a zatim i Juraj Majcen 1899. (*O nekim projektivnim svojstvima paraboličkog cilindroida*).

- prije 140 god. rođen je prvi hrvatski deskriptivni geometričar...
- 100 godina od osnutka Šumarske akademije i na njoj prve katedre za deskriptivnu geometriju...

Prvi deskriptivni geometričar na zagrebačkom Sveučilištu David Segen rođen je u Zagrebu 19. 12. 1859. Studirao je u Beču na Visokoj tehničkoj školi. Na Sveučilištu je započeo predavati u ljetnom semestru školske godine 1890./91. kolegij *Deskriptivna geometrija*, a idućih godina predavao je *aksonometriju, centralnu projekciju i sintetičku geometriju*.

Kada je 1898. u Zagrebu otvorena Šumarska akademija, na njoj je osnovana prva *Katedra za deskriptivnu geometriju, konstruktivno risanje i matematiku*, a prvim njezinim izvanrednim profesorom imenovan je David Segen. Usporedno je za slušače Mudroslovnog fakulteta držao predavanja iz specijalnih područja deskriptivne i sintetičke geometrije. Umirovljen je 1911. Tada je katedru na Mudroslovnom fakultetu preuzeo Juraj Majcen, a Segen je na Šumarskoj akademiji honorarno radio sve do kraja šk. god. 1918./19., kada ga je zamijenio Juraj Božičević.

— 75. obljetnica smrti prvog zagrebačkog sintetičkog geometričara...

Drugi zaslužni deskriptivni geometričar na zagrebačkom Sveučilištu bio je Juraj Majcen — Zagrepčanin po rođenju (1875.-1924.), Bečanin po školovanju. Bio je učitelj Kraljevske gimnazije u Osijeku, a 1900. habilitirao je na Mudroslovnom fakultetu. Temperamentan i iznimno pristupačan predavački rad na Mudroslovnom fakultetu započeo je 1901./02. s kolegijem *Kolineacija u ravnini*, a idućih je godina održavao predavanja iz mnogobrojnih geometrijskih kolegija. Po umirovljenju D. Segena 1911. godine katedra je za deskriptivnu geometriju proširena na čitavu geometriju i povjerena pravoj osobi — Jurju Majcenu.

Svestrani geometričar, ponajviše sintetičar, Juraj Majcen uspio je u kratkom životnom vijeku osnovati svoju geometrijsku školu, koja ga je nadživjela zahvaljujući ponajviše Vilku Niču i Rudolfu Cesarcu. U njegovo je doba osnovan i Geometrijski seminar na Mudroslovnom fakultetu. Bio je redoviti član JAZU, pravi vanjski član Češke zajednice nauka u Pragu, a prihvaćao se i mnogih drugih visokih dužnosti zbog svojih izvanrednih organizatorskih sposobnosti. Naglom i preranom smrću J. Majcena 1924. godine prekinuta je životna staza čovjeka iznimnih znanstvenih, pedagoških i organizatorskih sposobnosti. Zahvaljujući njemu, kojega naš naraštaj nije upoznao, imali smo Ničea.

• 80 godina deskriptivne geometrije na tehničkim fakultetima u Zagrebu...

Od šk. god. 1918./19. godine deskriptivna se geometrija razvija i na Tehničkoj visokoj školi, koja je te godine otvorena u Zagrebu. Prvi profesor deskriptivne geometrije na toj školi bio je Juraj Božičević, koji je čitav svoj radni vijek posvetio pedagoškom i nastavnom radu, te pisanju geometrijskih udžbenika. Usporedno je radio i na Šumarskoj akademiji nakon umirovljenja D. Segena.

• 10. obljetnica smrti Vilka Ničea...

Najveći sljedbenik J. Majcena i J. Božičevića i najvažnije ime u deskriptivnoj geometriji u Hrvatskoj bio je Vilko Niče (1902.-1987.), za kojega se sa sigurnošću može reći da je dao najveći znanstveni i pedagoški doprinos u području nacrtne i sintetičke geometrije. Danas nema geometričara ni inženjera u Hrvatskoj koji se nije služio njegovim udžbenicima. Napisao je velik broj znanstvenih radova, koji se odlikuju originalnošću u pristupu i koji su zbog sintetičkog načina dokazivanja uvijek plijenili simpatije istomišljenika ili pak odbijali one nesklone tom ne lakom načinu razmišljanja. Ono što je stvorio, stvorio je potpuno sam, jer je njegov jedini učitelj J. Majcen umro prerano, onda kada mu je najviše trebao, ali je ipak živio dovoljno dugo da Niču prenese svu svoju ljubav prema

sintetičkoj geometriji. Za razliku od Majcena, koji je umro mlad, Niče je živio dugo, a svoje je znanje i ljubav prema sintetičkoj geometriji nesebično prenosio na sve koji su ga okruživali. Ostavio je iza sebe mnogobrojne sljedbenike, takozvane *ničeovce*, kao malo koji pedagog-znanstvenik. Teško da postoji deskriptivni geometričar u Hrvatskoj koji na bilo koji izravni ili neizravni način nije Ničeov učenik. Protjeklo se stoljeće u deskriptivnoj geometriji kod nas može nazvati *Ničeovim razdobljem*.

Uz Ničea valja spomenuti i Jurja Justinijanovića (1895.-1965.), koji je preuzeo katedru za nacrtnu geometriju na Fakultetu strojarstva i brodogradnje nakon raspada Tehničkog fakulteta 1956. Pamtimo ga kao vrstna pedagoga, i autora nekoliko dobrih udžbenika iz Nacrtne geometrije, koji se zbog bogatstva sadržaja upotrebljavaju još i danas.

Spomenuti su geometričari svojim znanstvenim i pedagoškim doprinosima obilježili proteklu epohu. Pustit ćemo vremenu da nastavi slijed...

Izvori:

1. *Stogodišnjica nastave i organiziranog znanstvenog rada iz područja matematičkih znanosti na Sveučilištu u Zagrebu*, Društvo matematičara i fizičara SRH, Zagreb, 1977;
2. *Šumarska nastava u Hrvatskoj 1860-1960*, Šumarski fakultet u Zagrebu 1963.

CAD — softverski alat u geometrijskom modeliranju

Geometrijske discipline, posebno konstruktivna geometrija, izrastale su iz potreba graditeljstva i služile graditeljstvu od samih njegovih početaka. Ta se neraskidiva uzročno-posljedična veza nastavlja i danas, kad imamo nove alate za projektiranje. Softverski su alati sve složeniji i pružaju sve više. Kompletan proces proizvodnje, od ideje (skice), projekta, proračuna, ispitivanja do izrade prototipa i izvedbe objekta, radi se uz pomoć računala. Timovi ljudi rade u mreži i izmjenjuju informacije u obliku grafičkih i drugih podataka. Specijalizirani programski paketi za proračun konstrukcija obuhvaćaju i grafičku obradu podataka. Računalno modeliranje ima temeljnu važnost u projektiranju. Model objekta kreiran u CAD-u izravno se može podvrgnuti simulaciji opterećenja i analizama naprezanja. (Nešto o tome daje <http://www.algor.com>). Sve snažniji programi brzo obave numeričke proračune konstrukcija i rezultate prikazu grafički. Model je potreban i kod računalom vođene brze izrade materijalnog prototipa (makete). Nakon provjere na prototipu, elektronski pohranjen projekt izravno se ostvaruje.

Naši tehnički fakulteti školuju inženjere za 21. stoljeće i oštru tehnološku konkurenciju koja ih čeka. Nastava ima odgovornost za kvalitetu tog obrazovanja, a time i za naš buduću stupanj tehničkog razvoja. Geometrijska izobrazba budućih inženjera treba i mora obuhvatiti inženjersku grafiku i primjenu *geometrijske računalne grafike*, jer su geometrija i grafika nerazdvojne. Kreativna primjena te grafike pretpostavlja geometrijska znanja. Na studiju je potrebna računalno podržana konstruktivna geometrija. Druge prilike za geometrijsko tumačenje te grafike u tijeku studija nema. Ali i svi drugi kolegiji morali bi primijeniti računalnu tehnologiju u svom području, nastavljajući se na naš rad u 1. godini studija. Potrebna je istraživačka suradnja i koordinacija rada svih nastavnika. Vremena se mijenjaju: dok smo nekad morali bezuvjetno proći obuku za rad s logaritamskim računalom, sada trebamo osnove informatike, osnove računalne grafike i upoznavanje softverskih alata (u ovom slučaju za projektiranje).

Na nekim sveučilištima u Sjedinjenim američkim državama raspoložu mnogobrojnim CAD — softverima za modeliranje, koji studentima (u prvoj godini studija) omogućuju da model podvrgnu programu za analizu i proračun po metodi konačnih elemenata, te korigiraju

model do optimuma, a zatim posebnim uređajima i tehnikama brzo proizvode prototip. Interdisciplinarnost se nameće kao prijeko potrebna. Projekti proučavanja i usavršavanja cjelokupne nastave podržani su financijski.

Osnove grafike ostat će, izgleda, uvijek temeljni dio inženjerske izobrazbe. No inženjeri moraju kreativno rješavati uvijek nove probleme na trodimenzionalnim objektima. Za takvo bavljenje CAD-om preduvjet je razvijen *prostorni zor*. Brojna su istraživanja pokazala da bavljenje nacrtom geometrijom razvija i podiže na višu razinu sposobnost prostorne percepcije, a njezina je važnost općepriznata za uspjeh u svakoj inženjerskoj struci.

Najnovije verzije CAD-softvera postale su uobičajen softverski alat i u Hrvatskoj, na privatnim PC-ima naših studenata, i oni ih s (mladima svojstvenim) nestrpljenjem žele čim prije upotrijebiti u svom radu. Ali kako? (Nudi se grafički softver preko Interneta. Microstation nudi "studentsku verziju" svojih proizvoda po vrlo pristupačnoj cijeni. Pojavljuju se sve bolji modeli kao "CADKEY" i "Rhinoceros". Treba naučiti koristiti se time.)

Na Građevinskom fakultetu u Rijeci primjena kompjutorske grafike i CAD-a u nastavi geometrije uobičajena je već više godina. Raspoložemo s doniranim i kupljenim softverom. Kroz nastavu studenti postupno razvijaju sposobnost rješavanja geometrijskih problema i upoznaju računalnu grafiku (kao korisnici), koja im omogućuje ta konstruktivna rješenja. (Mislim da bi se Gaspard Monge složio s time.) To nikako ne znači zanemarivanje klasičnih metoda nego njihovu reafirmaciju u radu s novim alatom. Metode manipuliranja s 3D objektom treba najprije poznavati, kako bi ih se moglo prepoznati i kreativno upotrebljavati u novom okruženju. Nakon geometrijske analize problema, nalaženja najpogodnije taktike za klasično konstruktivno rješenje, pronalaze se taktike za računalnu konstruktivnu obradu tog problema. U početku CAD služi za vizualizaciju i kao nastavno pomagalo, da bi postupno postao i predmet učenja. Upoznaju se i upotrebljavaju geometrijske transformacije i projiciranja. Geometrijsko modeliranje ima temeljnu važnost u procesu projektiranja, pa se tome posvećuje posebna pozornost. Razna konstruktivna rješenja potrebna su da se dođe do korektnog i upotrebljivog modela, koji se dalje

obrađuje Boolovim operacijama, tehnikama za realističan izgled itd.

Bitna je novost što se pri računalnom rješavanju svi konstruktivni postupci izvode u trodimenzionalnom prostoru a ne više u ravnini neke projekcije (premda ta mogućnost postoji). To zahtijeva već dobro razvijenu sposobnost prostorne percepcije. Sve su vrste modela zaista trodimenzionalne tvorevine, i kao takve se i pohranjuju. Iz toga se mogu dobiti željeni pogledi i detalji na papiru, tablice podataka ili podatci za automatsku proizvodnju (CAM). Projiciranja su samo načini stvaranja slika tog prostora na ravnini ekrana, a u programu su sadržane u matričnom obliku.

Problem (zadatak) često treba formulirati sasvim drukčije nego za rad klasičnim metodama.

Metode su rješavanja drukčije, pa se ne može riješiti samo "tuširati" s pomoću računala nego treba sve riješiti ispočetka. Naime, klasične *grafičke metode* imaju znatne prednosti pred ručnim računanjem, ali računalni program izvršava sve potrebne analitičke operacije u dijelu sekunde i postupak rješavanja ne može biti vidljiv! Rezultat je izveden matematički točno, bilo da se traži, primjerice, prostorna krivulja 4. reda 1. vrste, ravninska krivulja višeg reda ili njihove projekcije. Potrebno je neusporedivo manje vremena. Vidljivost se rješava automatski, jednim pritiskom na tipku. Lako je prikazati različite presjeke, a brzo se izvedu sve promjene zadanih elemenata. Međutim, korisniku zadatak nije sada jednostavniji i lakši nego onda kad je radio klasično, jer treba znati još neke stvari što prije nije trebao. Ako ima sva potrebna znanja, posao je jednostavniji i brži. Treba mu, dakle, pružiti nastavu jednog opsežnijeg kolegija, ili dva paralelna: geometriju i grafiku. Mislim da je najsretnije rješenje da to bude jedna cjelina.

Za ilustraciju, evo konkretnog primjera. Datalj primjene CAD-a u modeliranju pravčaste plohe:

U profesionalnom softverskom paketu kao što je AutoCAD ponuđen je površinski tip modela za različite, pa i pravčaste plohe. Ali nemoguće ih je modelirati onako kako ih generiramo, po definiciji. Ne postoji mogućnost da program uzima u obzir tri zadane ravnalice. Ako pokušamo zadati bilo koje dvije od triju ravnalica, gotovo je sigurno da ona treća neće imati nikakve veze s plohom iz jednostavnog razloga što dobiveni model ne odgovara zadanoj plohi. Kako direkcijska ravnina implicira u konačnosti neku paralelnost, za ostvarenje te paralelnosti moramo se pobrinuti sami. Željenu plohu treba zadati drugim, dobro odabranim ravnalicama, i to odabranim segmentom. K tome moraju biti dovoljne dvije ravnalice, i to krivulje koje će istodobno biti sječene izvodnicama na jednakim razmacima. Dakle, kako bi se modelirao konoid, prije početka nameće se pitanje da li pronaći još jednu krivulju na plohi koja je istoga tipa kao i jedna krivulja ravna-

lica. Redovito su to slične krivulje. Nekad se radi o centralnoj sličnosti (kod uspravnih konoida). Za jedan kosi kružni konoid, na primjer, može se na torzalnim pravcima dužina između kružnice i pravca udvostručiti kopiranjem tako da krajnje točke određuju novu ravnalicu. Tek tada problem postaje rješiv "at the push of the button" (pritiskom na tipku).

ZAKLJUČAK

Ne treba se bojati da će klasična geometrijska znanja postati nepotrebna, ali ako mi ne pokažemo kako se njima služiti u CAD-u, i to u konkretnoj primjeni, ta znanja padaju u zaborav već nakon ispita. Klasične ručno izvedene konstruktivne metode neće više nikomu trebati. Već su neupotrebljive u suvremenom projektiranju i nekonkurentne na tržištu. S druge strane, naši će studenti upotrebljavati CAD, ali rutinski a ne kreativno. Nama će reći da im nacrtana geometrija nije potrebna, a za prostorni zor pouzdat će se u CAD-program.

Mjesto geometrije u nastavi

U posljednjih desetak godina susrećemo se s problemom kako uskladiti nastavu geometrije odnosno matematike s brzim razvojem informatičke tehnologije i zahtjevima koji se postavljaju nama matematičarima na tehničkim fakultetima. Osim toga, prije nekoliko godina na pojedinim je tehničkim fakultetima osjetno smanjena satnica deskriptivnoj geometriji, reducirani su ili ukinuti i neki drugi matematički kolegiji.

Od 1988. godine na skupovima u inozemstvu na kojima smo sudjelovale mi, ili netko od naših kolega s fakulteta, razmatran je taj problem. Navodimo neke od njih:

- 3th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry (ICECGDG), 1988, Vienna, Austria
- 5th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, 1992, Melbourne, Australia
- 6th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, 1994, Tokyo, Japan
- 7th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, 1996, Cracow, Poland
- Special SEFI European Seminar on Geometry in Engineering Education, 1997, Smolenice, Slovakia
- 9th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, 1998, Espoo, Finland
- 8th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, 1998, Austin, Texas

Naziv poznate zagrebačke predstave "U našoj kući se o tome ne govori" poslužio nam je kao motiv da naša razmišljanja o nastaloj situaciji i informacije koje smo o tome prikupile prateći iskustva i izlaganja kolega iz inozemstva iznesemo u Zagrebu na sljedećim skupovima *4. susret nastavnika matematike Republike Hrvatske* (srpanj 1998.) i *IV. znanstveno-stručni kolokvij Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku* (rujan 1998.). Zainteresiranost naših kolega s fakulteta i sudionika navedenih skupova potaknula nas je da napišemo ovaj članak.

Već se 1988. godine u Beču pojavio problem što i kako, ali i zašto predavati geometriju. Naglašeno je da u nastavi geometrije treba upoznavati studente s naj-

boljim metodama i najmoćnijim sredstvima ne zadržavajući se na rješenjima koja su do jučer bila najbolja. Kako bi se to moglo postići potrebna je sposobnost prostornog zora i znanje klasične euklidske geometrije jer to omogućuje bolju upotrebu geometrijskih programa kao što su CAD, CAGD, CACG itd. Osim toga, ne treba zanemarivati bazičnu geometriju u osnovnim i srednjim školama gdje su geometrijski sadržaji najčešće na kraju udžbenika, što uvjetuje njihovo ponekad i nenamjerno izostavljanje.

S kongresa u Melbourneu 1992. možemo istaknuti predavanje prof. H. Seybolda [4] s Matematičkog instituta Tehničkog sveučilišta u Münchenu, koji među ostalim kaže. "... I najbolje računalo s najboljim softverom ne može samo od sebe dati novo rješenje. Moćno su sredstvo koje omogućuje suočavanje s problemima što su do jučer bili izvan našeg dometa. Međutim, sve napredniji alati zahtijevaju sposobnije i obrazovanije korisnike kako bi ih mogli odgovarajuće upotrijebiti... Iskustvo je pokazalo da su studenti spremni učiti geometriju uvide li da im geometrija pomaže pri rješavanju inženjerskih problema. Iskustvo je osim toga pokazalo da nema mnogo smisla podučavati samo trivijalnu geometriju. Ne možemo li dostići rješavanje složenijih problema ne bismo trebali ni počimati... Budući inženjeri moraju naučiti toliko mnogo geometrije kako bi bili u mogućnosti stvarati nova rješenja, upotrebljavajući, uspoređujući i poboljšavajući poznate uspješne geometrijske ideje, metode i postupke. Jedino oni koji to znanje posjeduju danas, moći će ga upotrijebiti sutra i uz računalo..."

Slični su se naglasci na važnosti nastave geometrije mogli čuti u Tokiju (1994.) i u Krakovu (1996.). Profesor H. Stachel s Instituta za geometriju Tehničkog sveučilišta u Beču u pozvanom predavanju [6] iznesenom u Krakovu na neki način projicira razmišljanja s tog skupa. On naglašava da sve jači i sofisticiraniji programi za modeliranje traže sve više geometrijskih znanja. Što je znanje, pita se. Grubo govoreći, to je sve ono što ostane u studentovoj glavi nakon što zaboravi većinu informacija kojima mu je ona sistematski punjena. Nada se da nakon učenja geometrije ostaje razvijeniji prostorni zor, vizija geometrijskoga svijeta, njegov jezik i sadržaj, osjećaj za logičku strogost te stvaralački um otvoren za nove ideje.

Godine 1997. održan je Specijalni SEFI europski seminar o geometriji u inženjerskoj naobrazbi (Special

SEFI European Seminar on Geometry in Engineering Education). SEFI je skraćenica za Europsko društvo za inženjersku naobrazbu (European Society for Engineering Education). Na tom je skupu prof. Mustou sa sveučilišta Loughborough u Velikoj Britaniji u plenarnom predavanju [2] dao nacrt razgovora za tribinu koja je uslijedila. Raspravljalo se o sljedećim pitanjima:

- zašto podučavati geometriju
- zahtjevi inženjera (upotreba računala)
- ususret potrebama
- geometrija u opadanju
- pronalaženje prostora za geometriju
- kako dalje.

Na pitanje zašto podučavati geometriju, isticani su prije navedeni razlozi.

Na pitanje koje su potrebe budućih inženjera, odgovoreno je kako bi studenti nakon odslušanih i položenih matematičkih kolegija morali posjedovati određene sposobnosti, npr.:

- moraju biti sigurni i stručni u upotrebi matematike
- moraju biti upoznati s djelovanjem različitih metoda
- moraju znati koju metodu odabrati (egzaktne, približne...)
- moraju prepoznati gdje su upotrijebljene aproksimacije,

a zahtjevi koje bi studenti morali zadovoljiti pri upotrebi računala su:

- mogućnost procjene očekivanog rezultata
- svjesnost ograničenja upotrebljavane metode
- mogućnost otkrivanja eventualne ljudske i strojne greške.

Na žalost, sve je teže ići ususret tim potrebama, jer se ulazni podaci mijenjaju. Smanjuje se spretnost studenata u primjeni znanja jednog predmeta na drugi kao posljedica nesklonosti povezivanju u cjelokupnom procesu obrazovanja, kako kod đaka tako i kod nastavnika. Primjećuje se sve veća nesklonost prema dugotrajnom radu, a mogli bismo se pitati i što je sa sklonošću razmišljanju? Ne smije se pogriješiti i pomalo brzopleto zaključiti da je ona sve manja. Smanjuje se broj sati osnovnih kolegija, sadržaji ostaju najčešće isti pa su zbog nedostatka vremena nastavnici prisiljeni posezati za gotovim rezultatima, preskačući dokaze i analize očekujući brze i jednoznačne odgovore bez mogućnosti diskusije. Ne možemo zanemariti i velik utjecaj džepnih računala, bio on dobar ili loš.

U takvu okruženju geometrija polako gubi bitku, a kako se moglo čuti na Devetom SEFI europskom seminaru o matematici u inženjerskoj naobrazbi (9th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education), održanom 1998. u Finskoj, sličan proces polako zahvaća i ostala područja matematike. U svojoj knjizi *Uvod u geometriju* Coxeter je već 1961. komentirao: "U posljednjih 30 ili 40 godina većina je

Amerikanaca iz nekog razloga izgubila interes za geometriju". Tridesetak godina poslije, američki matematičar Stillwell [7] naglašava: "... Geometrija je predstavljala osnovu matematičke naobrazbe, a danas gotovo da ne postoji ni kao predmet na fakultetima... Umjesto da oplakujem danu situaciju, veseli me mogućnost novog, drugačijeg početka. Klasična geometrija nije više odgovarajuća osnova matematike ili fizike jer su se obje geometrizirale, geometrija se ne može više odvajati od algebre, topologije, analize..." Takvo se razmišljanje proširilo i na područje Europe, gdje je situacija ipak različita u raznim zemljama budući da je nastava geometrije posljednjih 50-ak godina bila prilično neujednačena. Tako na primjer u srednjim školama i na fakultetima u srednjoj Europi, gdje ona ima dugu tradiciju, geometrijski kolegiji iako smanjeni i danas postoje, za razliku od zapadne Europe (V. Britanija, Francuska, Španjolska i dr.), ili sjeverne Europe (Švedska, Danska, Finska i dr.) gdje to nije slučaj. Ipak, i u tim je zemljama, nakon razdoblja nezatna interesa za geometriju uslijedilo razmišljanje o tome kako za nju pronaći mjesta unutar matematičkih programa. Primijećeno je da ukidanje pojedinih predmeta narušava ravnotežu cjelokupnoga nastavnog procesa ali i povratak na stare nastavne programe ne može više zadovoljiti.

Koje su dakle mogućnosti u pronalaženju prostora za geometriju ?

- smanjivanje geometrijskih sadržaja, malo ovdje, malo tamo, slabo rješava problem
- suprotno tome, postoji ideja da se geometrija postavi u središte nastavnog programa te da se ostala područja matematike na nju nadovezuju
- kompromisno je, po našem mišljenju realnije, ono rješenje po kojem bi ključni geometrijski sadržaji bili osnova matematičkih programa, a izborni bi se geometrijski kolegiji nudili na višim godinama studiranja.

Na kraju, kao odgovor na pitanje kako podučavati geometriju, naglašavamo sljedeće:

- matematičarima bi trebalo biti u interesu da se geometrija održi u nastavi
- obnova nastave geometrije trebala bi biti praćena odgovarajućim promjenama sadržaja
- između stavova "geometrija usprkos računalu" i "geometrija samo uz računalo" trebalo bi odabrati srednji put uz obaveznu upotrebu kompjutorske učionice
- nastava geometrije ne bi se smjela striktno razdvajati na disjunktne dijelove: sintetičku, analitičku, nacrtnu, diferencijalnu itd.
- bio bi poželjan drukčiji pristup geometriji u naobrazbi nastavnika matematike za srednje škole i fakultete
- nedovoljno se spominju moguće primjene geometrije.

Naša je želja da se nastavi geometrije na tehničkim fakultetima uštedi cijeli ovaj put, da se do korisnih rješenja dođe uvažavajući iskustva naših kolega koji su se prije nas suočili s brzom i sveobuhvatnom mogućnošću primjene informatičke tehnologije. Držimo da o toj problematici treba raspravljati na nekoj tribini na kojoj bi sudjelovali nastavnici srednjih škola i fakulteta. Ona bi mogla biti organizirana na primjer od strane Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku ili Društva matematičara Hrvatske.

IZVORI

- [1] FRANTIŠEK, J., VELICHOVA, D.: *Variational Geometry and Invariance*, Proceedings of the Special SEFI European Seminar on Geometry in Engineering Education, Smolenice, 1997, 32-37
- [2] MUSTOE, L.: *Finding Space for Geometry in the Curriculum*, Proceedings of the Special SEFI European Seminar on Geometry in Engineering Education, Smolenice, 1997, 38-44
- [3] SEYBOLD, H.: *Computer-Aided Constructive Geometry - Do it 3D!*, Proceedings of the 3th ICECGDG, Vienna, 1988, 196-198
- [4] SEYBOLD, H.: *Geometry for Engineers: What Do They Need Tomorrow? What Do We Have To Teach Today?*, Proceedings of the 5th ICECGDG, Melbourne, 1992, 327-330
- [5] STACHEL, H.: *Descriptive Geometry, the Art of Grasping Spatial Relations*, Proceedings of the 6th ICECGDG, Tokyo, 1994, 533-535
- [6] STACHEL, H.: *Why Shall We Also Teach the Theory Behind Engineering Graphics*, pozvano predavanje održano na 7th ICECGDG, Krakov 1996.
- [7] STILLWELL, J.: *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1992, citiran u NUESCH, P.: *A New Life for Geometry in Modern Engineering*, Proceedings of the 8th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, Prague, 1996, 170-173

Crtež u znanosti

Da znanost nije sama sebi svrhom lijepo se vidi iz nedavno dovršenog projekta *Crtež u znanosti*, koji je obuhvatio istoimenu izložbu, knjigu i znanstveni skup. Bio je to ponajprije kulturni događaj u našoj sredini koji je povezoao znanost, umjetnost i obrazovanje.

Osnovni razlog pokretanja projekta *Crtež u znanosti* bila je želja za osnaživanjem univerzalnosti crteža kao vizualnog medija u znanstvenim istraživanjima, obrazovanju učenika i studenata te u vizualnim komunikacijama općenito.

Budući da nastava likovnog odgoja i likovne kulture danas u Hrvatskoj ne zauzima odgovarajuće mjesto u školskim programima — što se vidi po smanjenu broju nastavnih sati — autori predavanja i postera na znanstvenom skupu *Crtež u znanosti* drže da tim predmetima treba vratiti ono mjesto koje im pripada.

Na projektu *Crtež u znanosti* sudjelovalo je 40 znanstvenih institucija — fakulteta, odnosno instituta — s kojih se aktivno uključilo u rad više od 100 znanstvenika.

Izložba je zatvorena, znanstveni skup završen, no ostaju dvije knjige koje je izdao Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu. Knjiga *Crtež u znanosti* nosi oznaku ISBN 953-6082-03-9, ima 300 stranica, 200 crno-bijelih i ilustracija u boji, a sadrži sljedeća poglavlja:

Deklaracija o pravima djece i mladeži Republike Hrvatske na kontinuiranu i djelotvornu likovnu izobrazbu

Declaration on the Rights of Children and the Young in the Republic of Croatia of Continuous and Efficient Art Education

Miljenko Lapaine: Predgovor, Foreword

Andre Mohorovičić: Civilizacija i kultura čovječanstva u crtežima

Tomislav Premerl: Crtež kao način mišljenja

Božidar Jušić: Vizualni znanstveni modeli između znanosti i umjetnosti

Vera Turković: Reunifikacija umjetnosti i znanosti

Tihomir Marjanac: Današnja razina likovnog izražaja na Sveučilištu u Zagrebu - primjer PMF-a

Jelena Krmpotić-Nemanić: Medicina i umjetnost

Maja Arčanin-Špehar: Medicina u crtežu, Zbirka Zarnik — crteži histoloških preparata

Jelena Krmpotić-Nemanić: Crtež u anatomiji

Stjepan Pepeljnjak: Crtež u mikrobiologiji

Ivo Trinajstić: Crtež u botanici

Sonja Nikolić: Crtež kao model u kemiji

Vladimir Devidé: Crtež u matematici

MILJENKO LAPAINE



Ćiril Koludrović: Predočavanje prostora crtežom

Ivan Juras: Aksonometrija u arhitektonu crtežu

Katarina Horvat-Levaj, Ivan Tenšek: Crtež u povijesti umjetnosti

Radovan Ivančević: Deskriptivni i interpretacijski crtež i nacrt

Paško Lovrić: Crtež u kartografiji

Stanislav Frangeš: Kartografika — jučer, danas, sutra

Miljenko Lapaine: Geodetsko crtanje u visokoškolskoj nastavi

Petrica Novosel-Žic: Crtež u geografiji

Tihomir Marjanac: Crtež u geologiji

Marica Čunčić: Proporcije glagolskih slova

Sanja Puljar: Etnologija — znanost između riječi i slike

Mirjana Nazor: Dječji crtež kao pokazatelj intelektualnog razvoja i kao projektivno sredstvo

Ljubomir Radovančević: Crtež kao dijagnostičko sredstvo u psihijatriji i psihologiji

Ljubomir Radovančević: Neki aspekti (pedo)psihijatrijske primjene crteža

Damir De Zan, Marina De Zan: Likovno izražavanje u psihoterapiji djece s traumatskim iskustvom iz rata

***: O autorima

Prema riječima recenzenta prof. dr. sc. Nenada Trinajstića, redovitoga člana HAZU, osnovne su karakteristike knjige:

- to je prvo djelo na hrvatskom jeziku u kojem se obrađuje uloga crteža u znanosti
- djelo sadrži izvorne članke o upotrebi crteža kao modela u matematici i prirodnim znanostima (kemija, biologija, medicina, psihologija, geografija, geologija) te u tehničkim (arhitektura, geodezija) i društvenim znanostima (sociologija, likovne umjetnosti, povijest umjetnosti, dizajn)
- to je prvo djelo takve vrste na hrvatskom jeziku koje otvara novu vrstu interdisciplinarnog istraživanja u Hrvatskoj u koje ulaze kao jednaki partneri znanost i umjetnost
- svaki članak u knjizi zasebno su recenzirala dva recenzenta, birana iz kruga vodećih hrvatskih prirodoslovaca i humanista
- svaki članak u knjizi ima sažetak i ključne riječi na hrvatskom i engleskom jeziku
- svi su tekstovi u knjizi lektorirani
- za to bi djelo trebali biti zainteresirani svi (studenti, nastavnici, istraživači) koji djelatno sudjeluju u razvoju prirodnih i društvenih znanosti u Hrvatskoj. Međutim, to djelo ima i šire značenje. Za njega bi trebali biti zainteresirani nastavnici i đaci srednjih škola te cjelokupna hrvatska javnost koju zanima odnos između znanosti i umjetnosti
- djelo pripada različitim kategorijama pa ga se može smatrati *naprednim visokoškolskim udžbenikom, znanstvenim djelom i djelom za popularizaciju znanosti* u širem smislu jer uključuje i umjetnost
- namjera je također toga djela da utječe na školske programe iz kojih je posljednjih godina gotovo potpuno nestalo likovno obrazovanje, tako da mladi ljudi završavaju srednje škole osiromašeni za jednu duhovnu dimenziju, koju može popuniti jedino likovna umjetnost. Stoga ponovno naglašavam da je najveća vrijednost tog djela u pokušaju da pokrene domovinski interes za crtež kao izražajno sredstvo u svakodnevicu, ali i u obrazovnom procesu, znanosti i umjetnosti, jer u većini europskih zemalja, u čiji krug i mi želimo ući, likovne su umjetnosti znatno prisutne u obrazovanju, znanosti i umjetnosti.

Druga je objavljena publikacija *Knjiga sažetaka* predavanja i postera. Izdavač je Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, nosi oznaku ISBN 953-6082-04-7, ima 60 stranica i veći broj ilustracija. Poster su obuhvatili crtež u speleologiji i primijenjenoj geologiji, geodeziji, kartografiji, restauraciji i konzervaciji, logopediji, arheologiji, zdravstvenom odgoju te medicinskoj bakteriologiji i mikologiji.

Za izložbu je bilo prikupljeno ukupno gotovo 500 izložaka. Na žalost, zbog relativno malog prostora u atriju Muzeja Mimare u Zagrebu, mogla je biti izložena samo četvrtina građe. Konačni izbor napravio je mr. sc. Mario Beusan, koji je sveukupno gledajući napravio čudo, jer je u iznimno kratkom vremenu postavio prema svim procjenama vrlo lijepu izložbu, izloživši pod staklima i u vitrinama ono najvrjednije i najljepše. Tematske cjeline izložbe *Crtež u znanosti* (abecednim redom):

1. Arhitektura
2. Botanika
3. Etnologija i antropologija
4. Farmacija
5. Geodezija
6. Geologija
7. Geometrija
8. Glagoljska paleografija
9. Kartografija
10. Kemija
11. Kriminalistika
12. Leksikografija i enciklopedistika
13. Medicina
14. Meteorologija
15. Mikrobiologija
16. Oceanografija
17. Pedologija
18. Povijest umjetnosti
19. Seizmologija
20. Sveučilišni udžbenik
21. Šumarstvo
22. Tekstilna tehnologija
23. Transdisciplinarno područje
24. Veterinarstvo
25. Zlatni rez

U nastavku će biti prikazan crtež u geometriji, arhitekturi, zlatnom rezu i u transdisciplinarnom području. Uvodni tekst za crtež u geometriji napisala je mr. sc. **Jelena Beban-Brkić**, voditeljica te tematske cjeline na izložbi, a njezine suradnice bile su mr. sc. **Nikoleta Sudeta** i mr. sc. **Vlasta Szirovicza**. Uvodni tekst za crtež u arhitekturi napisao je prof. dr. sc. **Ivan Juras**, voditelj te tematske cjeline bio je doc. **Ljubomir Mišević**, a suradnica mr. sc. **Božica Hajsig**. Za zlatni rez tekst i crteže priredio je prof. **Mladen Pejaković**, a za crtež u transdisciplinarnom području mr. sc. **Božidar Jušić**. Sve je uredio i uskladio **Miljenko Lapaine**.

Opis svih izložaka ujednačen je prema sljedećem ključu:

1. Naslov izložka
2. Naslov izložka na engleskom jeziku
3. Autor, mjesto i godina izrade
4. Vrsta izložka, tehnika izrade i veličina
5. Mjesto čuvanja
6. Kratak opis
7. Literatura
8. Ime i prezime autora kataloške jedinice

Crtež u deskriptivnoj geometriji

Neka nitko ne uđe tko ne zna geometriju.

(natpis iznad vratiju Platonove sobe)

Bog uvijek geometrizira.

(Platon)

Nema kraljevskog puta za geometriju.

(Menaechmus Aleksandru Velikom)

Prije no što sam čuo Mongea nisam znao da znam opisnu geometriju.

(Lagrange)

Ne mogu opisati napore na koje sam bio osuđen da razumijem nešto od dijagrama deskriptivne geometrije, koju mrzim.

(Hermite)

Elementi geometrije pojavljuju se već u Babilonu i starom Egiptu. Ploče pronađene u Nipuru, danas u Iraku, oko 1500 godina pr. Kr. daju podatke o tzv. Babilonskoj geometriji.

Naziv geometrija (zemljomjerstvo) potječe od grčkih riječi $\gamma\eta$: *zemlja* i $\mu\epsilon\tau\rho\nu$: *mjera*. Vjeruje se da su naziv izabrali Grci, smatrajući da su disciplinu otkrili Egipćani, baveći se problemima mjerenja zemljišta. Grci su je i razvili u deduktivnu znanost.

Prema matematičkim rječnicima, geometrija je grana matematike koja se bavi prostornim odnosima i oblicima. Proučava invarijantna svojstva danih elemenata pri određenim grupama transformacija.

Poznavanje geometrije nužno je za razvoj prostornog načina razmišljanja i vizualizacije, pa crtež možemo smatrati sastavnim dijelom geometrijskog načina izražavanja.

U različitim geometrijskim područjima crtež se ne upotrebljava u istom opsegu. Crtež je osnovno sredstvo izražavanja *deskriptivne geometrije*.

Deskriptivnu geometriju pronašao je i razvio *Gaspard Monge* (1746.-1818.), poglavito u svrhu primjene u vojnoj inženjeriji. Početkom te geometrijske grane smatraju se Mongeova rješenja upotrijebljena u teoriji utvrđivanja, koja je on ponudio kao predavač na vojnoj akademiji u Mézièresu. Petnaest su godina metode deskriptivne geometrije smatrane vojnom tajnom i čuvane, da bi se tek 1794. o njoj javno progovorilo. Osnutkom École Polytechnique iste godine u Parizu, geometrija je počela cvjetati zahvaljujući utjecaju

Mongea. Među njegovim sljedbenicima, zadržimo li se na toj poznatoj pariškoj školi, ističu se Charles Dupin, Jean-Victor Poncelet i drugi.

Putujući kroz povijest nailazimo na različite nazive pod kojima je ta disciplina bila poznata, kao na primjer *opisno mjerstvo*, *opisna geometrija* ili *nacrtna geometrija*. Radi se zapravo o grani geometrije koja proučava metode prikazivanja prostornih figura u ravnini a također i metode rješavanja prostornih zadataka s pomoću takvih prikazivanja, služeći se pritom alatima — ravnalom i šestarom, a u novije doba i računalom.

Pred vama se nalaze crteži, od kojih je većina izvedena klasičnim tehničkim priborom (olovka, trokut, šestar, tuš i dr.), te nekoliko radova izvedenih uz pomoć računala.

Jelena Beban-Brkić

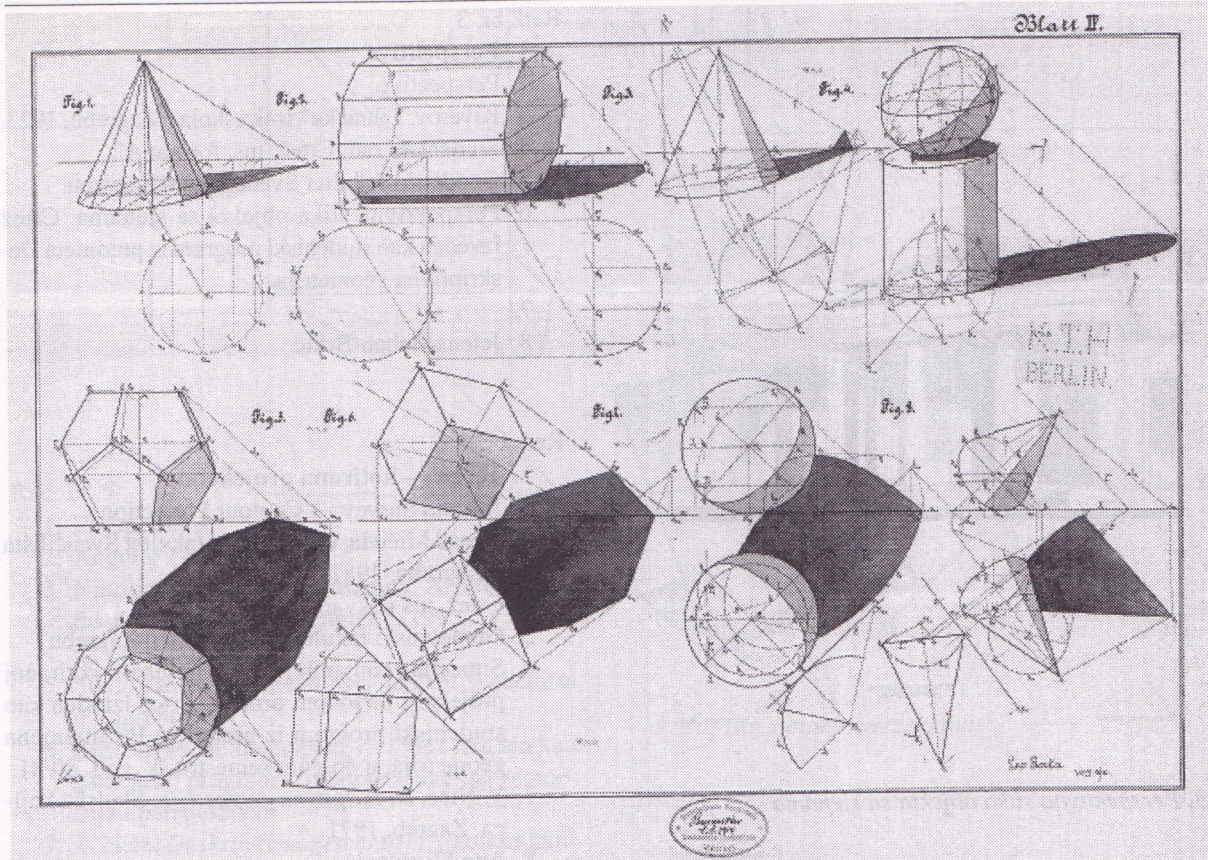
Slijedi pregled izložaka koji su na izložbi predstavljali crtež u deskriptivnoj geometriji.

Red. br. 1

1. **Sjene tijela u Mongeovoj projekciji**
2. *Shadows of Solids in Monge's Projection*
3. Leopold Soria (1891-1956), Tehnička visoka škola, München, 1909/10
4. Studentski rad. Crtež, tuš, format A2
5. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. **Sjene tijela u Mongeovoj projekciji — Blatt IV.** Crtež izrađen tijekom studiranja na Strojarskom odjelu Tehničke visoke škole u Münchenu
- 7.
8. Jelena Beban-Brkić

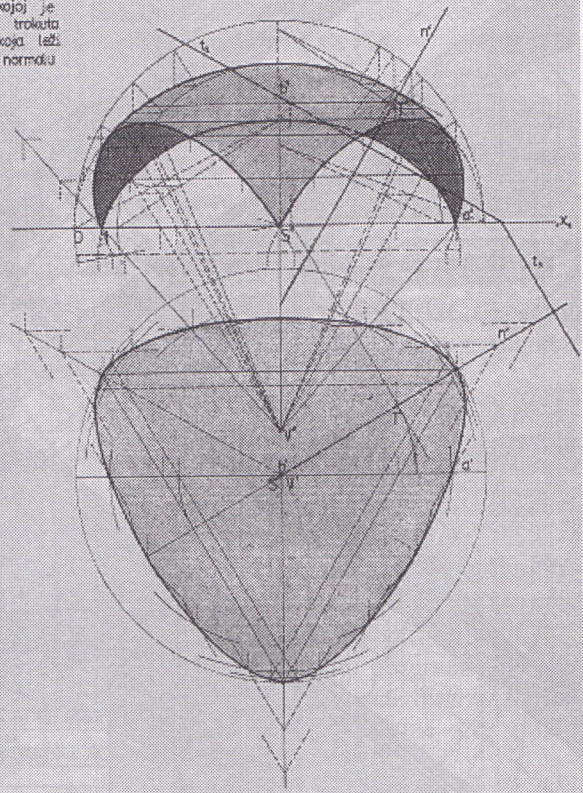
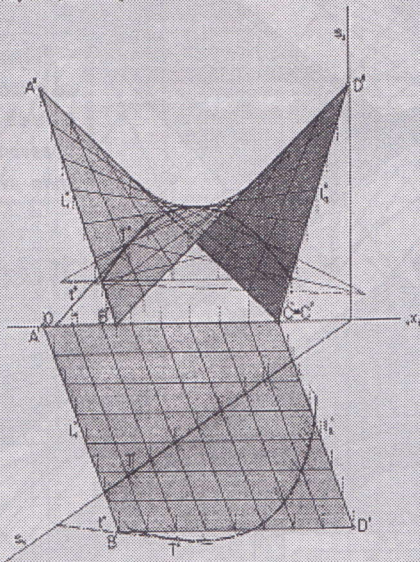
Red. br. 2

1. **Presjeci ploha**
2. *The Intersections of Surfaces*
3. Ljiljana Šukalj, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1985.
4. Crtež, tuš i pastela, format A3
5. Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. **Presjeci hiperboličkog paraboloida i rotacijskog elipsoda — Mongeova projekcija.** Crtež izrađen kao studentski program iz predmeta Primijenjena geometrija, u drugom semestru šk. god. 84/85.
7. V. Niče, *Deskriptivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1971.
8. Ivanka Babić

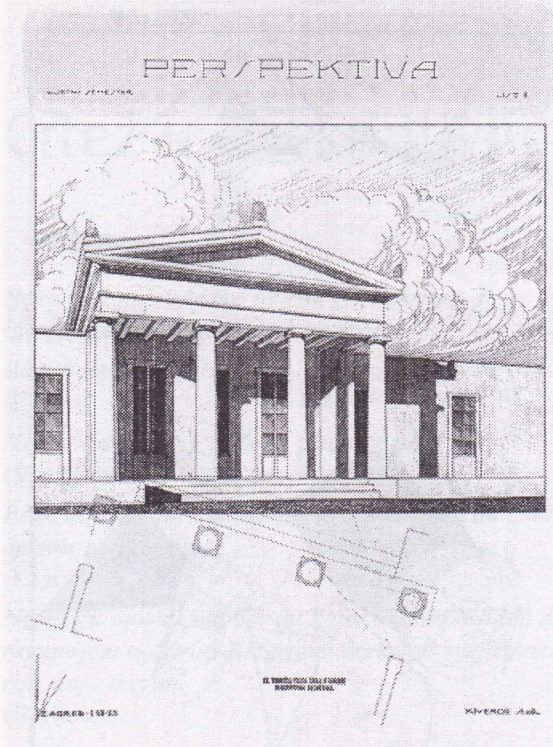


1. Sjene tijela u Mongeovoj projekciji

- 5.a) Zadan je rotacioni spljoštjeni elipsoid, kome je ekvator u T_1 , /središte $S(7,85;0)$, polusni elipsoida $a=7$, $b=5,5$. Konstruirajte ortogonalne projekcije onog dijela gornje polovice tog elipsoida koji je omeđen uspravne trostrane piramide, kojoj je osnovica jednakokrani trokut upisan ekvatoru elipsoida, /jedna stranica tog trokuta paralelna je s osi $x(y=5)/$, a vrh $V(7;85;-7)$. U točki $T(11,-,-)$ plohe koja leži i u simetričnoj ravni isječenog dijela, konstruirajte tangencijalnu ravninu i normalu plohe.
- b) Pravočastasta ploha zadana je s tri pravčaste ravnice: $l_1=AB/A(0,0,8)$, $B(25,7,0)$, $l_2=CD/C(8,0,0)$, $D(10,5,7,8)$, $l_3=EF$. Odredite te plohe ravninom $\Sigma(10,5,7,\infty)$ i pravu veličnu tog presjeka. U točki $T(-,5,-)$ presječne krivulje konstruirajte njenu tangntu.



2. Presjeci ploha /na tipu L i ravne ravnine, s pripadajućom krivuljom fokusa. Svi podtipovi 1.1.



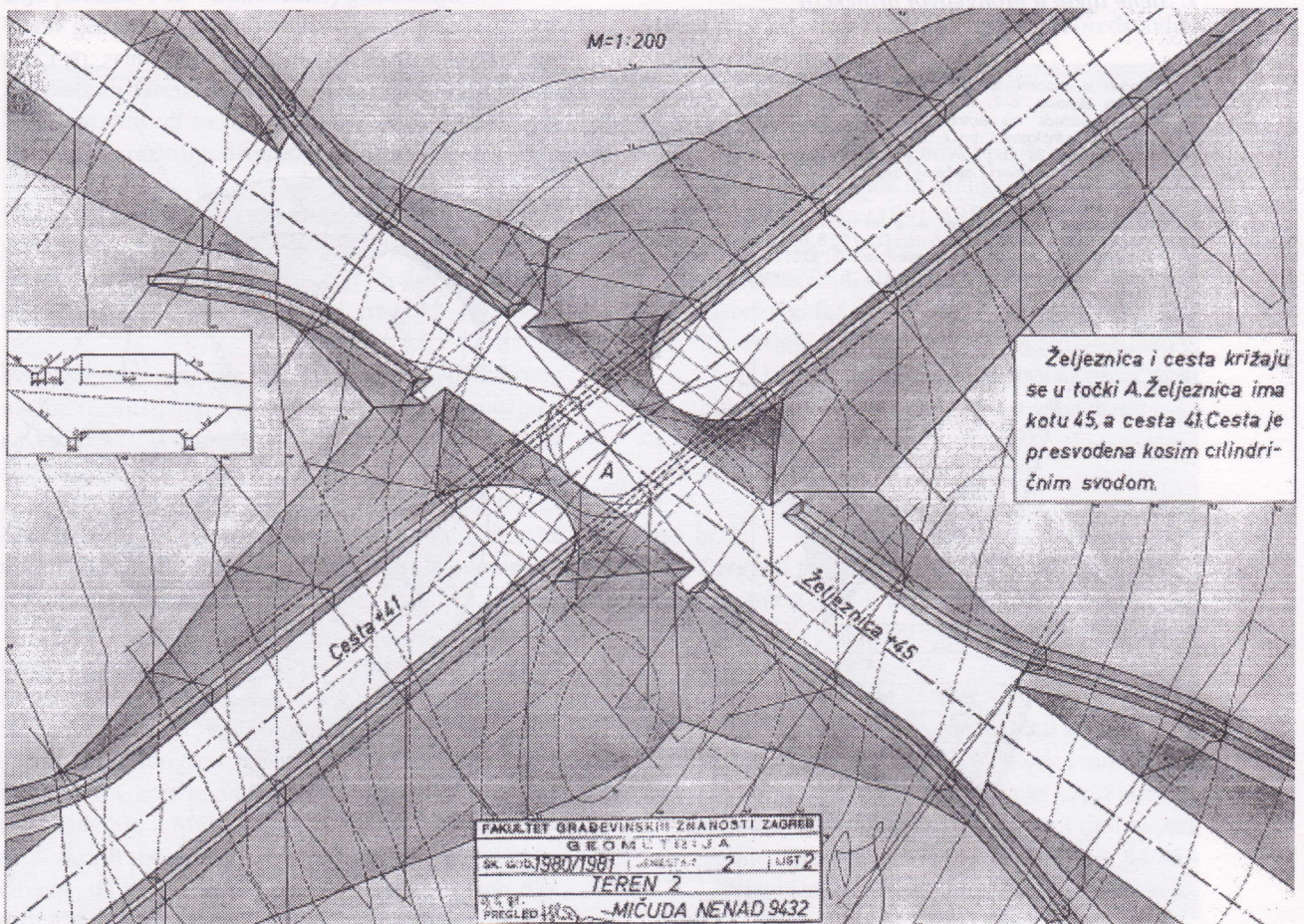
3. Perspektivna slika objekta sa sjenama

Red. br. 3

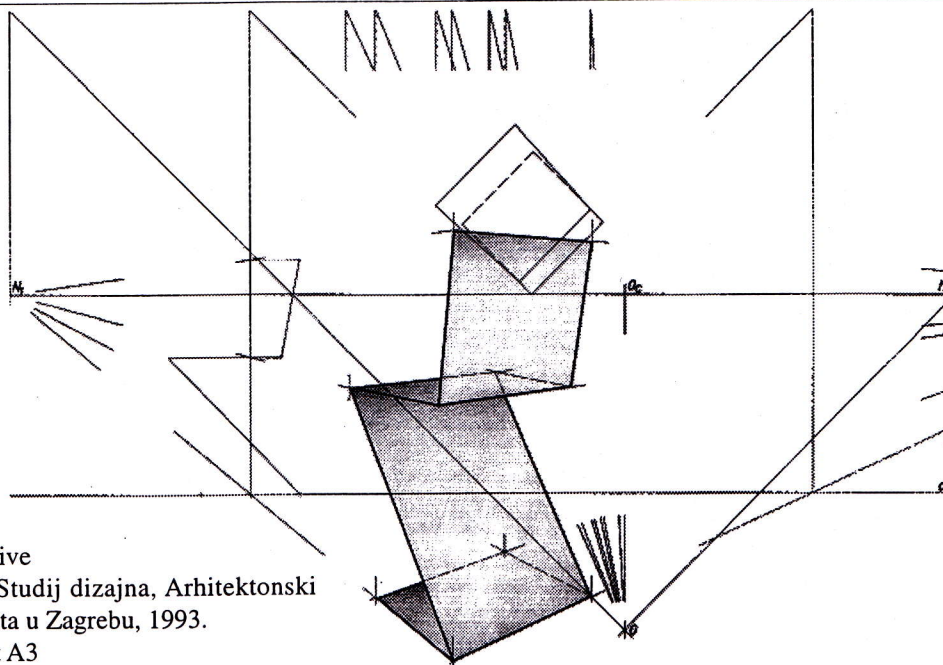
1. Perspektiva
2. Perspective
3. Kiverov, Tehnička visoka škola u Zagrebu, 1923.
4. Studentski rad. Crtež, tuš, format A2
5. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Perspektivna slika objekta sa sjenama. Crtež izveden kao studentski program iz predmeta Deskriptivna geometrija
- 7.
8. Jelena Beban-Brkić

Red. br. 4

1. Teren — kotirana projekcija
2. A Land Survey — Contour Projection
3. Nenad Mičuda, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1981.
4. Crtež, tuš i akvarel, format A3
5. Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Situacija zemljanih radova riješena u kotiranoj projekciji metodom profila. Crtež izrađen kao studentski program iz predmeta Primijenjena geometrija, u drugom semestru šk. god. 80/81.
7. V. Niče, *Deskriptivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1971.
8. Ana Sliepčević



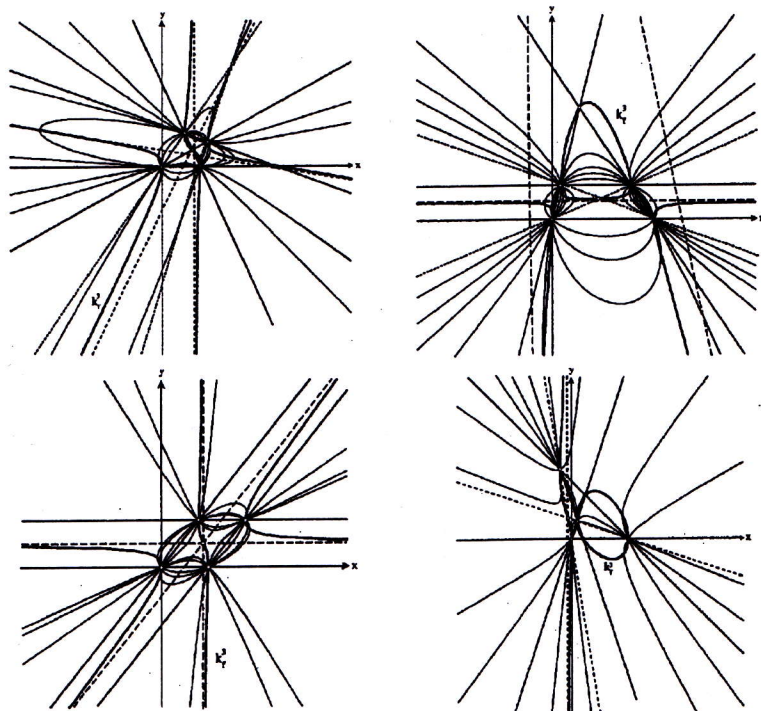
4. Teren — kotirana projekcija



Red. br. 5

1. Perspektiva
2. Angular Perspective
3. Nikolina Hinšt, Studij dizajna, Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1993.
4. Crtež, tuš, format A3
5. Studij dizajna, Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Zig-zag stolac u perspektivi. Crtež izrađen kao studentski program iz predmeta Nacrtna geometrija i perspektiva.
7. V. Niče, *Deskriptivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.
Brauner-Kickinger, *Geometrija u graditeljstvu*, Školska knjiga, Zagreb 1980. (prijevod Kurilj i Hajsig)
8. Nikoleta Sudeta

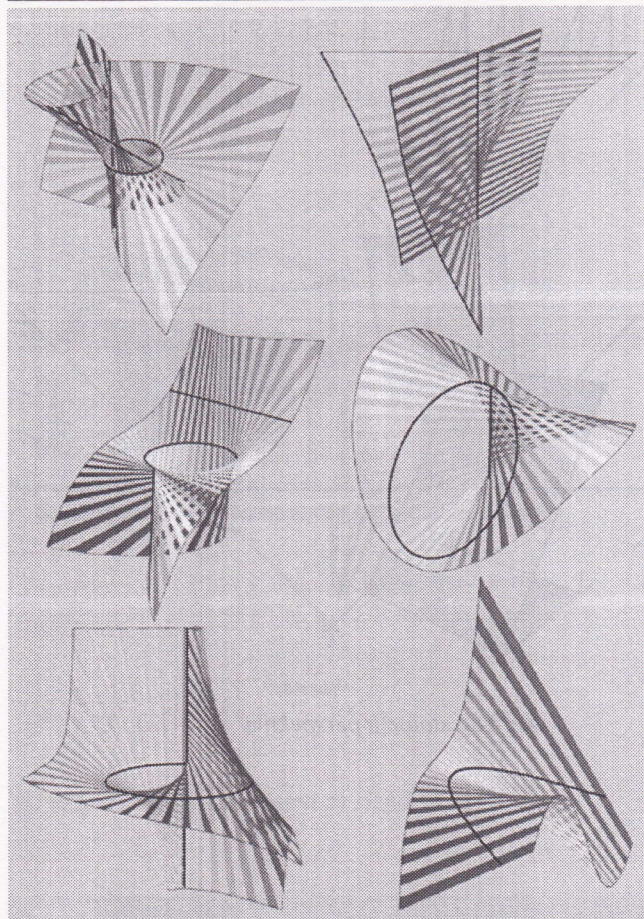
5. Zig-zag stolac u perspektivi



6. Pramenovi konika tipa I izotropne ravnine, s pripadajućom krivuljom fokusa. Svi podtipovi I.1.

Red. br. 6

1. Pramenovi konika tipa I izotropne ravnine, s pripadajućom krivuljom fokusa. Svi podtipovi I.1.
2. Conic Pencils of Type I in the Isotropic Plane. Subtypes I.1.
3. Jelena Beban-Brkić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1996.
4. Kompjutorska grafika, format A3
5. Geodetski fakultet, Kačićeva 26, Zagreb
6. Pramenovi konika s neraspadnutom krivuljom fokusa.
7. J. Beban-Brkić, *Prilog klasifikaciji pramena konika izotropne ravnine*, rukopis, 1995.
Računalni programi upotrijebljeni pri izradi: *Wolfram Research Mathematica 3.0*, *CorelDRAW 7.0*.
8. Jelena Beban-Brkić



7. Tri tipa običnih i konoidalnih pravčastih ploha 3. reda. Tipovi I, II, III Sturmove klasifikacije

Red. br. 7

1. Tri tipa običnih i konoidalnih pravčastih ploha 3. reda. Tipovi I, II, III Sturmove klasifikacije

2. Three types of the ordinary and conoidal ruled cubics. Types I, II, and III according to Sturm

3. Sonja Gorjanc, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1998.

4. Računalna grafika (print) — format A3

5. Sonja Gorjanc, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1998.

6. Primjeri triju tipova pravčastih ploha 3. reda.

7. E. Müller, J. L. Krames, *Konstruktive Behandlung der Regelflächen*, Franc Deuticke, Leipzig and Wien, 1931.

S. Gorjanc, *The Generation of Ruled Cubics by Using Mathematica 3.0*, Proceedings of the 8th ICECGDG, Vol.1., Austin, Texas, 1998., 41-48

Računalni programi upotrijebljeni pri izradi: *Wolfram Research Mathematica 3.0*, *Macromedia Freehand 7.0*

8. Sonja Gorjanc

Red. br. 8

1. Klasifikacija simetričnih eliptičnih nožišnih ploha (1,2) kongruencija prema broju i vrsti singularnih točaka

2. The classification of the symmetric elliptic pedal surfaces of (1,2) congruences according to the number of their singular points

3. Sonja Gorjanc, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1998.

4. Računalna grafika (print) — format A3

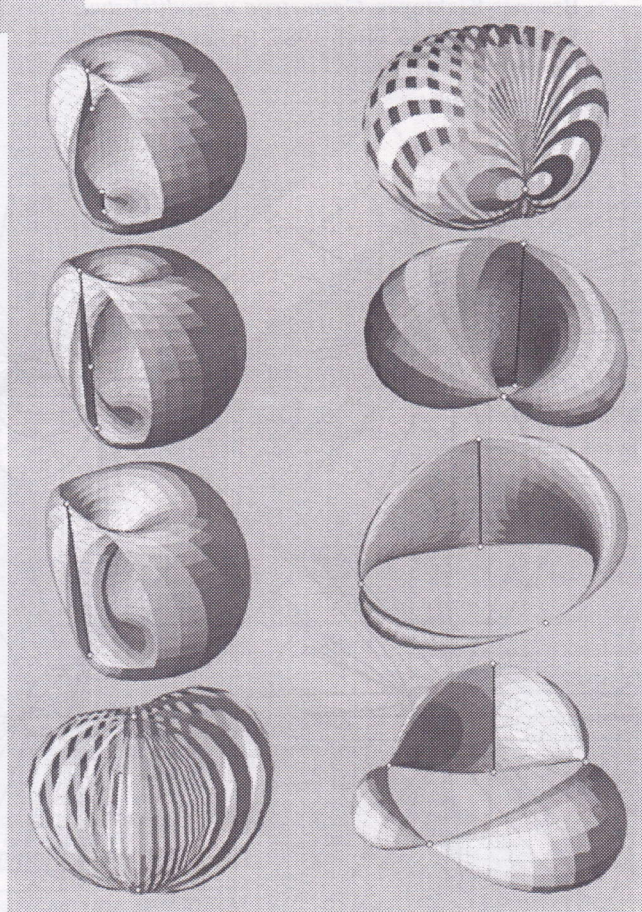
5. Sonja Gorjanc, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1998.

6. Osam primjera simetričnih eliptičnih nožišnih ploha (1,2) kongruencija razvrstanih prema broju i vrsti singularnih točaka na njima.

7. S. Gorjanc: *The Pedal Surfaces of (1,2)-Congruences with a One Parameter Set of Ellipses*, *Journal for Geometry and Graphics*, Vol.1, No. 2, 1997., 135-149

Računalni programi upotrijebljeni pri izradi: *Wolfram Research Mathematica 3.0*, *Macromedia Freehand 7.0*

8. Sonja Gorjanc



8. Klasifikacija simetričnih eliptičnih nožišnih ploha (1,2) kongruencija prema broju i vrsti singularnih točaka

Crtež u arhitekturi i dizajnu

Arhitektov crtež u prvom redu pokazuje sustav mišljenja; s pomoću crteža se procjenjuje ideja, a ne vrijednost kuće. Pritom istražujemo koliko je linija upila misao, pa je u crtežu ona vidljiva u svom manjem dijelu jer je veći dio zaronjen u arhitektovoj imaginaciji. Crtežom i intuiciju podvrgavamo tehničkoj provjeri koja vodi krajnjem cilju shvaćanja problema prostora, a ne primarno razumijevanju njegove pojavnosti.

Crtež je pisani oblik prikazan u dogovorenim kodovima, a stupanj čitljivosti ovisi o vrsti korisnika (suradnik, staričar, instalater, naručitelj itd.). No, možemo uočiti da su u svim povijesnim razdobljima arhitekti crtežom prikazivali ili oslobođene unutrašnje naboje ne bi li se emocionalnošću potvrdilo da je građenje kuće rezultat biološkog procesa ili je dominirala ideja jer građenje kuće proizlazi iz racionalno-tehničkog postupka. U prvom slučaju u arhitektovu se crtežu nije mogla prepoznati kuća, što je značilo da crtež nije imao produktivnu namjenu. To je bilo posebno vidljivo u razdoblju ekspresionizma.

Arhitekt postmoderne bio je više interpretator koji pokušava integrirati postojeće informacije iz nekih drugih multidimenzionalnih struktura s novima, koje određuje osobitost mjesta. Primjenom tuđe ideje, bilo modela ili tipa, odgađamo fazu osobnog istraživanja jer želimo apstraktnost tipa ili modela prevesti u obličje predviđene zgrade. Moderna nije mogla u cijelosti spriječiti prijenos određenog shematiziranog povijesnog iskustva. Dekonstruktivističku arhitekturu moguće je odrediti samo primjenom računala pa u takvim crtežima dominira primarnost slike nad potencijalnom realnošću.

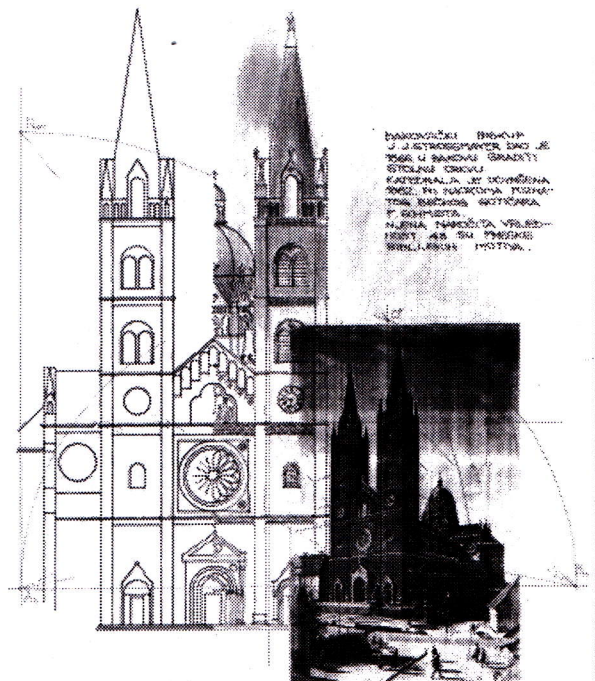
U onom trenutku kad je kuća izgrađena, crtež gubi osnovno značenje i postaje tek dokument kojim arhitekt može dokazati autentičnost svoje ideje.

Ivan Juras

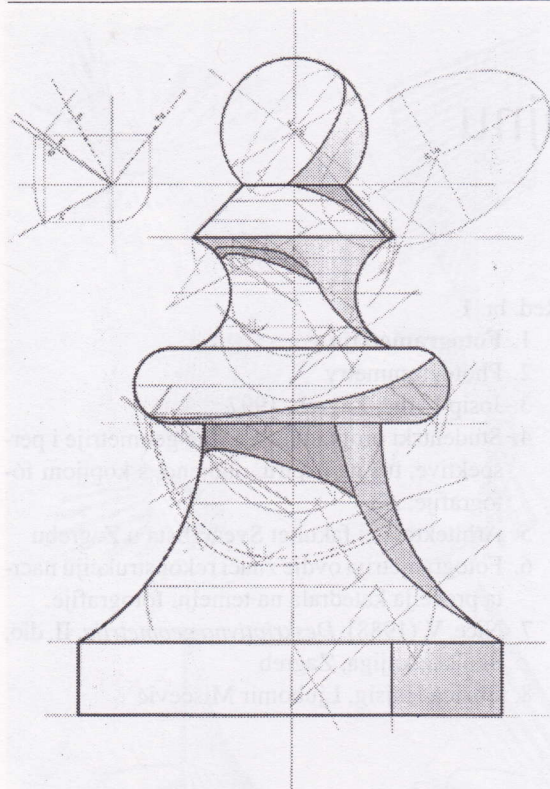
Slijedi pregled izložaka koji su na izložbi predstavljali crtež u arhitekturi i dizajnu.

Red. br. 1

1. **Fotogrametrija**
2. Photogrammetry
3. Josip Ladić, Zagreb, 1997.
4. Studentski program iz nacrtnge geometrije i perspektive, tuš na papiru, obojeno, s kopijom fotografije, A3
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Fotogrametrija ovdje znači rekonstrukciju nacrta pročelja katedrala na temelju fotografije.
7. Niče, V. (1988): *Deskriptivna geometrija*, II. dio, Školska knjiga, Zagreb
8. Božica Hajsig, Ljubomir Miščević



1. Fotogrametrija



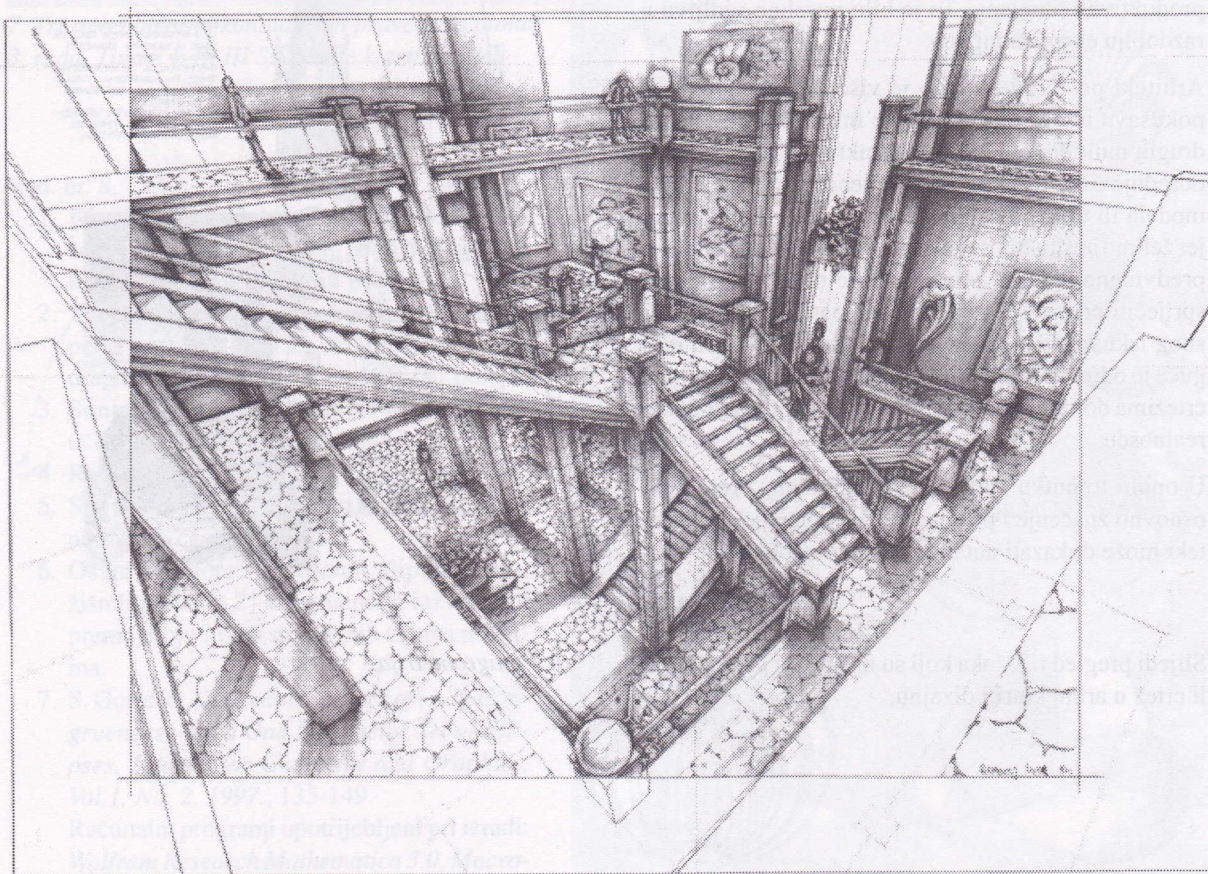
2. Sjene na rotacijskoj plohi

Red. br. 2

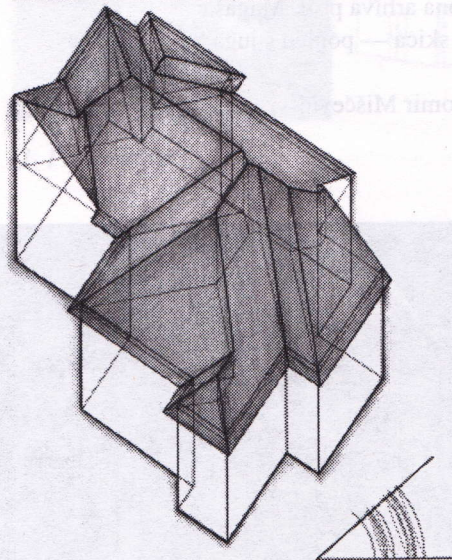
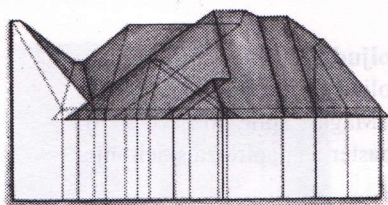
1. Sjene na rotacijskoj plohi
2. Shadows on the rotational surface
3. Mladen Kulas, Zagreb, 1976.
4. Studentski program iz nacrtne geometrije, tuš na papiru, obojeno, A3
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Sjene na rotacijskoj plohi, crtež izrađen u okviru predmeta Nacrtna geometrija i perspektiva
7. Niče, V. (1988): *Deskriptivna geometrija*, I. i II. dio, Školska knjiga, Zagreb
8. Božica Hajsig, Ljubomir Mišćević

Red. br. 3

1. Ptičja perspektiva
2. Bird's eye Perspective
3. Igor Rogulj, Zagreb, 1986.
4. Tuš i olovka na pausu, crni i crveni tuš na crtačem papiru, A2
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Ptičja perspektiva interijera, studentski rad
7. Niče, V. (1988): *Deskriptivna geometrija*, I. i II. dio, Školska knjiga, Zagreb
8. Paula Kurilj, Nikoleta Sudeta, Ljubomir Mišćević



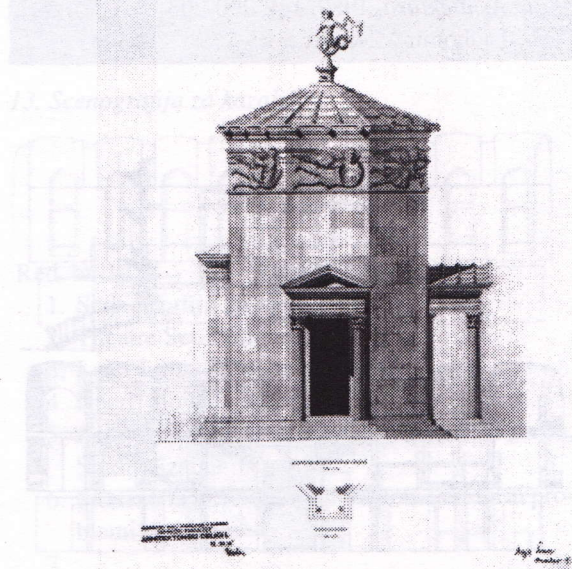
3. Ptičja perspektiva



4. Krovšte, nacrt i aksonometrija

Red. br. 5

1. Pročelje rimskoga hrama
2. Facade of Roman Temple
3. Jerko Marasović, Zagreb, 1947.
4. Nacrt, olovka i akvarel na crtaćem papiru, 46 x 63 cm
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Studentski rad na Katedri za teoriju i povijest arhitekture
- 7.
8. Ljubomir Mišćević

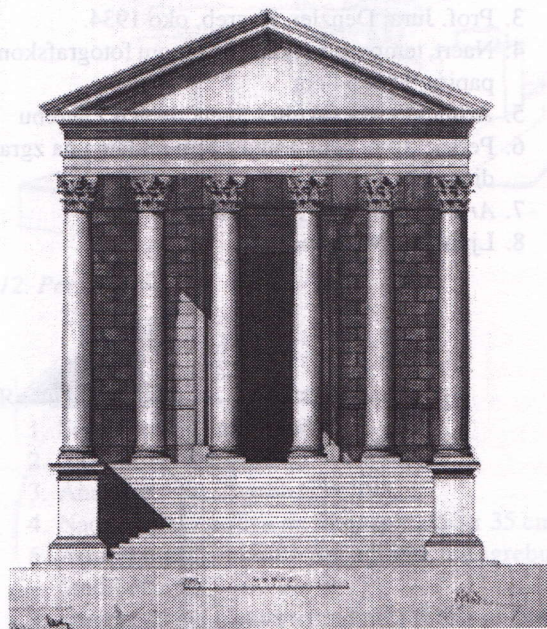


6. Toranj vjetrova

Red. br. 4

1. Krovovi
2. Roofs
3. Nataša Rauch, Zagreb, 1989.
4. Studentski program iz nacrtne geometrije, tuš na papiru, obojeno, A3
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Nacrt i aksonometrija krovšta, crtež izrađen u okviru predmeta Nacrtna geometrija i perspektiva
7. Niče, V. (1988): *Deskriptivna geometrija*, II. dio, Školska knjiga, Zagreb
8. Božica Hajsig, Ljubomir Mišćević

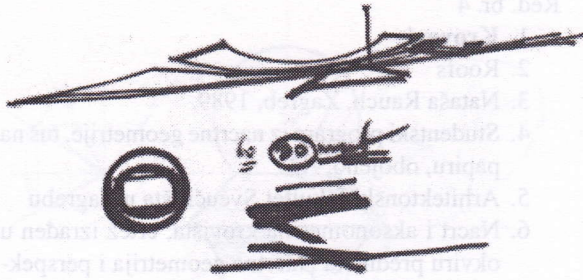
FASADA RIMSKOG HRAMA



5. Pročelje rimskoga hrama

Red. br. 6

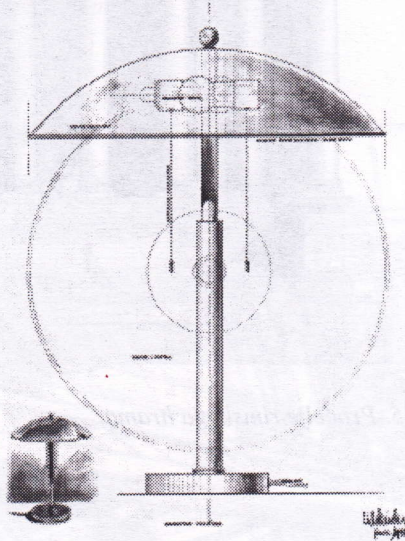
1. Toranj vjetrova
2. Wind Tower
3. Nada Švarc, Zagreb, 1935.
4. Nacrt, olovka i akvarel na crtaćem papiru, 48 x 68 cm
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Studentski rad na Katedri za teoriju i povijest arhitekture
- 7.
8. Ljubomir Mišćević



7. Stadion Poljud u Splitu, prva skica

Red. br. 8

1. Perspektiva, upravna zgrada gradskih komunalnih poduzeća
2. Perspective view
3. Prof. Juraj Denzler, Zagreb, oko 1934.
4. Nacrt, tempera, urezano na crnom fotografskom papiru, 88 x 54 cm
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Perspektivni prikaz svjetlećih reklama na zgradi noću
7. *Arhitektura*, 1987, 1-4, 200-203
8. Ljubomir Miščević



9. Stolna svjetiljka

Red. br. 10

1. Interijer
2. Interieur
3. Svebor Andrijević, Zagreb
4. Crtež, olovka i drvene bojice na pauspapiru, 70 x 50 cm
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Studencki rad u okviru predmeta Interijer
- 7.
8. Ljubomir Miščević

Red. br. 7

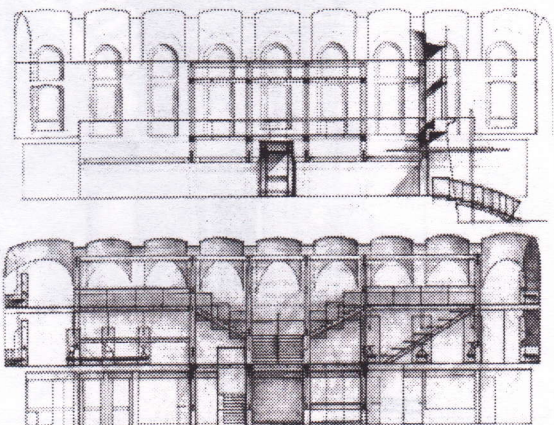
1. Stadion Poljud u Splitu
2. Stadium Poljud in Split
3. Prof. Boris Magaš, Split, proljeće 1976.
4. Crtež, flomaster na papiru za skiciranje, 46 x 22 cm
5. Osobna arhiva prof. Magaša
6. Prva skica — pogled s juga
- 7.
8. Ljubomir Miščević



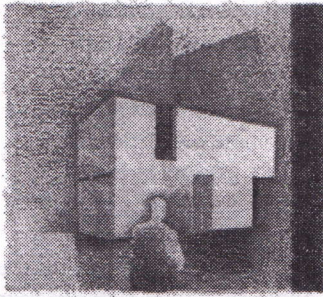
8. Perspektiva noću

Red. br. 9

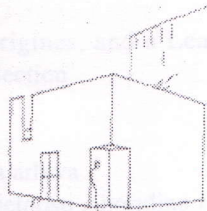
1. Stolna svjetiljka, upravna zgrada gradskih komunalnih poduzeća
2. Table Lamp
3. Prof. Juraj Denzler, Zagreb, 1936.
4. Nacrt, olovka na pausu, 49 x 60 cm
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
- 6.
7. *Arhitektura*, 1987, 1-4, 200-203
8. Ljubomir Miščević



10. Interijer

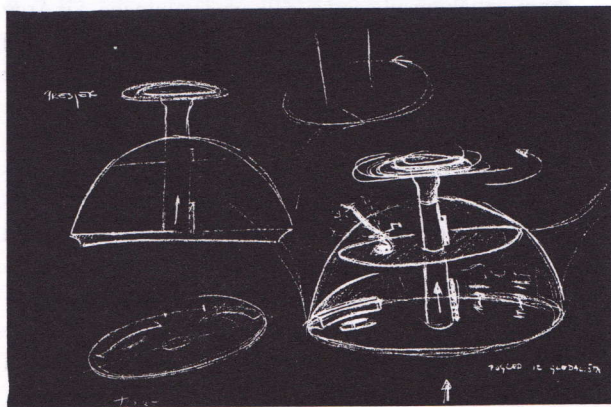


11. Perspektiva



Red. br. 12

1. **Perspektiva**
2. Perspective
3. Ž. Ivošević, Zagreb
4. Crtež, olovka na akvarel papiru, 56 x 38 cm
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Studentski rad u okviru predmeta Crtanje i plastično oblikovanje
- 7.
8. Ljubomir Mišćević



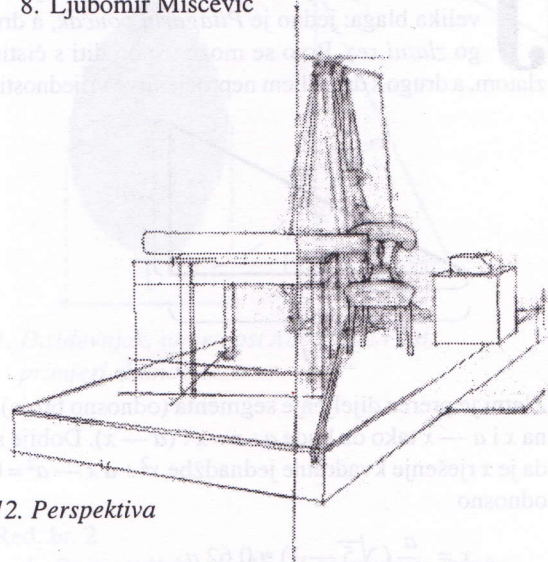
13. Scenografija za kazalište

Red. br. 14

1. **Scenografija za kazalište**
2. Theatre Set Designe
3. Luka Juras, Zagreb, 1997/98.
4. Nacrt, olovka i drvene bojice, 42 x 30 cm
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Studij dizajna
6. Studentski rad u okviru predmeta Prostorni problemi dizajna
- 7.
8. Ljubomir Mišćević

Red. br. 11

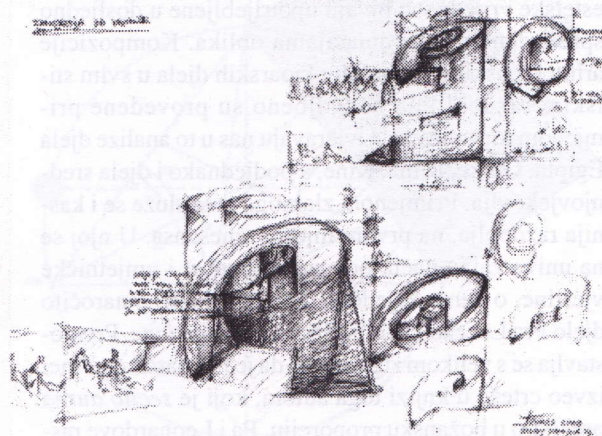
1. **Perspektiva**
2. Perspective
3. Marko Piljek, Zagreb
4. Crtež, olovka na akvarel papiru, 40 x 29 cm
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
6. Studentski rad u okviru predmeta Crtanje i plastično oblikovanje
- 7.
8. Ljubomir Mišćević



12. Perspektiva

Red. br. 13

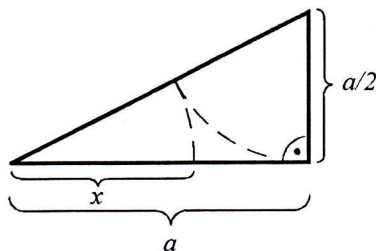
1. **Scenografija za kazalište**
2. Theatre Set Designe
3. Ana Vicković, Zagreb, 1997/98.
4. Nacrt, drvena bojica na fotopapiru, 50 x 35 cm
5. Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Studij dizajna
6. Studentski rad u okviru predmeta Prostorni problemi dizajna
- 7.
8. Ljubomir Mišćević



14. Scenografija za kazalište

Zlatni rez

Johannes Kepler piše: “Geometrija posjeduje dva velika blaga: jedno je *Pitagorin poučak*, a drugo *zlatni rez*. Prvo se može usporediti s čistim zlatom, a drugo s draguljem neprocjenjive vrijednosti.”



Zlatni je prerez dijeljenje segmenta (odnosno broja) a na x i $a - x$ tako da bude $a : x = x : (a - x)$. Dobije se da je x rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + ax - a^2 = 0$, odnosno

$$x = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) \approx 0,62 a.$$

Pojam zlatnoga prereza pripisuje se pitagorejcima, koji su izgleda znali konstruirati pravilan peterokut i deseterokut, što je ekvivalentno poznavanju konstruiranja zlatnoga prereza. Sigurno je da ga je poznao Euklid, koji je u II. knjizi *Elementa* riješio jednadžbu

$$x(a + x) = a^2.$$

On primjenjuje zlatni prerez za konstrukciju pravilnog peterokuta i deseterokuta te pravilnog dodekaedra i ikosaedra.

Zlatni se rez kao geometrijska pojava proučava linearno, planimetrijski i stereometrijski. Iz tog su omjera oblikovani naročito skladni kanonski oblici, čije estetske vrijednosti bivaju upotrijebljene u dosljedno sprovedenim komodulacijama oblika. Kompozicije arhitektonskih, slikarskih i kiparskih djela u svim stilskim razdobljima nedvojbeno su provedene primjenom toga omjera. Uvjeravaju nas u to analize djela Egipta, Grčke, Rima, Kine, a podjednako i djela srednjovjekovlja. Primjenom zlatnoga reza služe se i kasnija razdoblja, na prvom mjestu renesansa. U njoj se na univerzalan način povezuju znanost i umjetničke vještine, o čemu svjedoče mnogi traktati, a naročito djelo Fra Luccae Paciolia *Divina proportione*. Pretpostavlja se s velikom sigurnošću da je Leonardo da Vinci izveo crteže u knjizi toga autora, koji je *sectio aurea* prekrstio u božansku proporciju. Pa i Leonardove pismene i crtačke studije pokazuju kako su važna i zanimljiva bila proučavanja te pojave. Svima je poznat am-

blemski Leonardov crtež čovjeka raširenih ruku u kružnici i kvadratu, a njime se pitanje zlatnoga reza postavlja na osobit način. Zanimanje za zlatni rez nije se smanjilo ni idućih stoljeća, a naročito ga intenzivira XX. stoljeće i moderna, i to ne samo na užem likovnom području od Cézannea do kubista, simultanista i purista ili izričitih geometričara u pokretu De Stijla, na čelu s Mondrijanom. Mimo zlatnoga reza nezamislivi su oblici suvremene arhitekture i standardizacija u tehnologijama prefabrikacije građevnih elemenata, kućne opreme i dizajna u najširem mogućem dometu i na svim područjima proizvodnje.

Zanimljiva je prisutnost zlatnoga omjera i u izvaneuropskim starim kulturama, što nas navodi na zaključak da se radi o antropološkoj konstanti u temelju svakog svjesnog i nesvjesnog likovnog izričaja.

Zlatni je rez načelo organskoga rasta poradi svojstava homotetičkoga uvećavanja likova i volumena. Sir Arcy Tompson posvetio je proučavanju tih pitanja sav svoj život. Njegovo temeljno djelo *Rast i oblik* istinski je spomenik zlatnomu rezu.

Niz autora najrazličitijih struka objavljuje priloge problematici zlatnoga omjera. Na prvom su mjestu matematičari, kojima su ta pitanja još uvijek poticajno i plodonosno tlo istraživanja. Slijede ih svojim prilozima kemičari, biolozi, psiholozi, estetičari, antropolozi, arheolozi, povjesničari umjetnosti, sociolozi, teoretičari oblika, arhitekti, slikari, kipari, dizajneri i mnogi drugi stručnjaci.

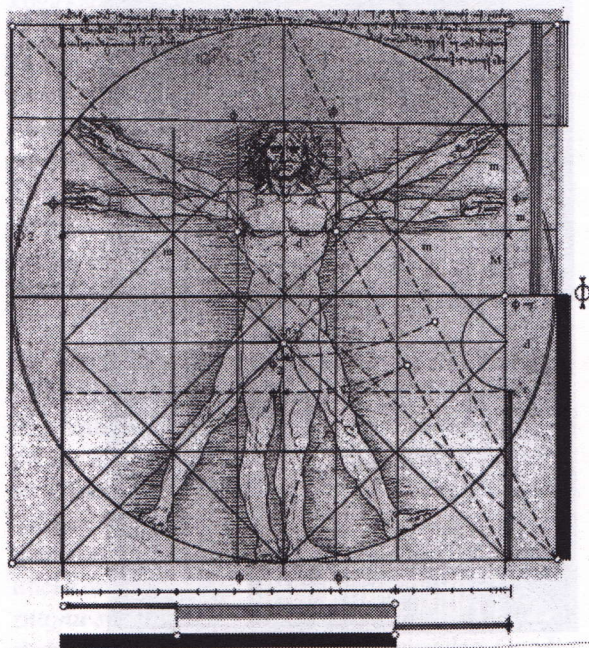
Knjiga M. Pejakovića *Zlatni rez* obrađuje svojstva i vrline zlatnoga razmjera u prirodi i u duhovnim tvorbama tijekom čitave čovjekove povijesti. U njoj se materija izlaže tekstom, crtežima i slikom. Sadrži veliku količinu grafičkih prikaza, strukturalnih višebojnih crteža, te reprodukcije poznatih djela iz svjetskih galerija i muzeja, na kojima je obavljena grafička analiza strukture nastale na temelju zlatnoga omjera. U knjizi su pojedini važni objekti obrađeni i monografski (Velika piramida, Partenon, rimski Pantheon i drugi spomenici).

Mladen Pejaković

Slijede prikazi nekoliko izložaka s izložbe *Crtež u znanosti* na temu zlatnog reza.

Red. br. 1

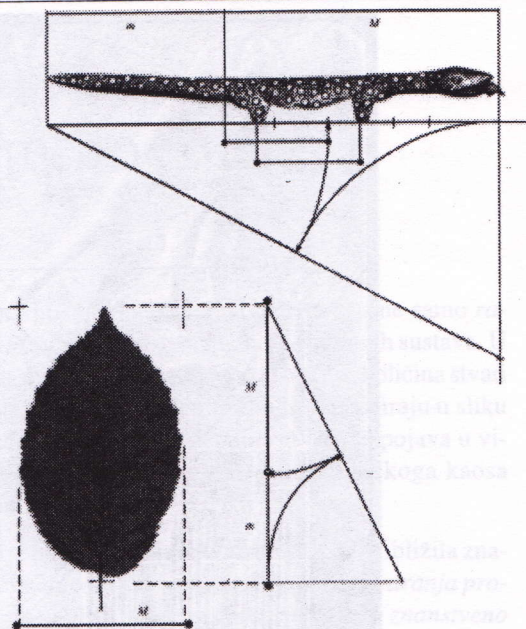
1. **Daždavnjak, umjetnost Aboriđina i list, primjeri zlatnog reza**
2. Salamander, Art of Aborigines, and a Leaf, Examples of the Golden Section
3. Mladen Pejaković
4. Crteži iz knjige
5. Mladen Pejaković, osobna arhiva
6. Zlatni rez nalazimo u umjetnosti Aboriđina i u prirodi
7. M. Pejaković: *Zlatni rez*, rukopis knjige, Zagreb, 1999.
8. Mladen Pejaković



2. Proporcijaska analiza Leonardova crteža

Red. br. 3

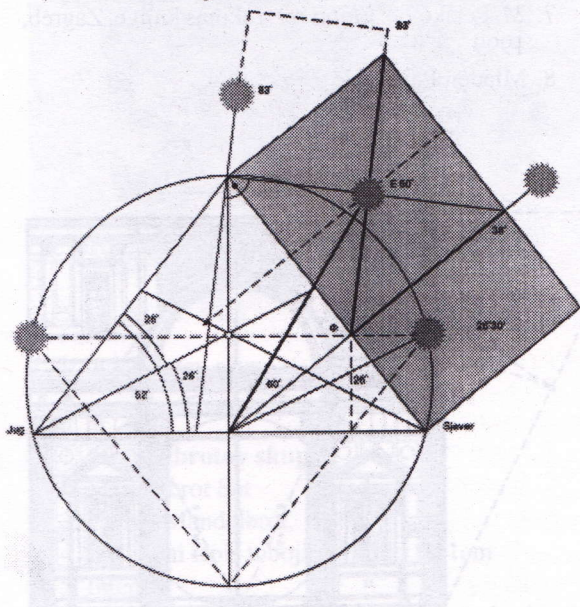
1. **Auron na stranici piramide**
2. Auron at the Edge of Pyramid
3. Mladen Pejaković
4. Crtež iz knjige
5. Mladen Pejaković, osobna arhiva
6. Auron na stranici piramide daje tri kuta s tri visine Sunca 83° , 60° i 36°
7. M. Pejaković: *Zlatni rez*, rukopis knjige, Zagreb, 1999.
8. Mladen Pejaković



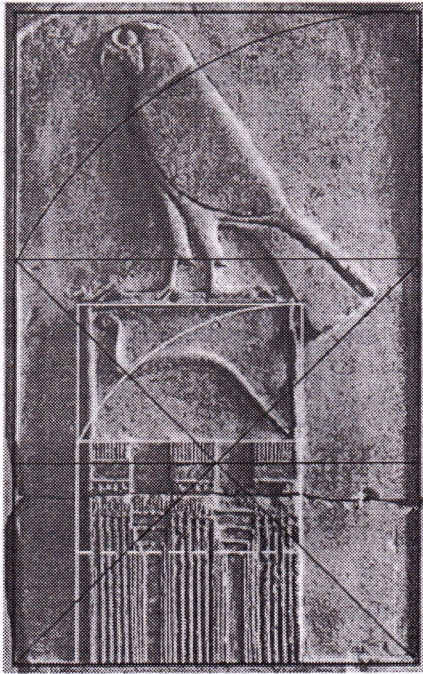
1. Daždavnjak, umjetnost Aboriđina i list, primjeri zlatnog reza

Red. br. 2

1. **Proporcijaska analiza Leonardova crteža**
2. Analysis of Proportions in Leonardo's Drawing
3. Leonardo da Vinci i Mladen Pejaković
4. Crtež iz knjige
5. Mladen Pejaković, osobna arhiva
6. Grafička analiza strukture Leonardova crteža koji prikazuje čovjeka raširenih ruku u kružnici i kvadratu
7. M. Pejaković: *Zlatni rez*, rukopis knjige, Zagreb, 1999.
8. Mladen Pejaković



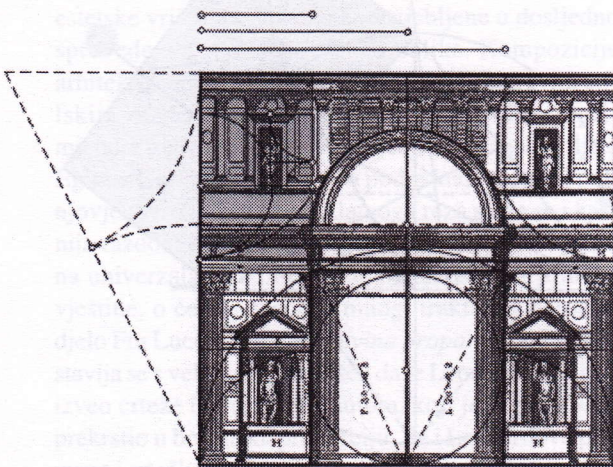
3. Auron na stranici piramide



4. Stela kralja Zmije

Red. br. 5

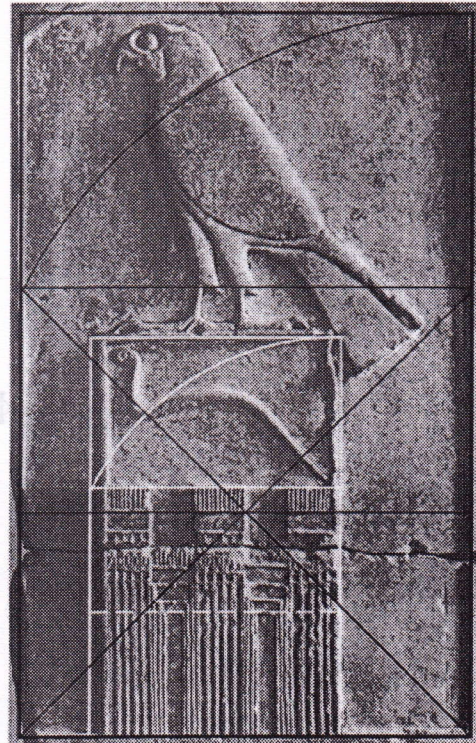
1. **Visina Sunca u meridijanu određuje likove i njihove položaje**
2. Elevation of the Sun in Meridian Defines Figures and their Positions
3. Mladen Pejaković
4. Crtež iz knjige
5. Louvre
6. Visina Sunca u meridijanu određuje likove i njihove položaje. Horusovo oko je visina Sunca ljetnog solsticija. Ekvinocijsko određuje vertikalu za crtu desnog ruba grada. Visina Sunca u zimskom solsticiju određuje visinu nebeskog luka na desnoj strani stele.
7. M. Pejaković: *Zlatni rez*, rukopis knjige, Zagreb, 1999.
8. Mladen Pejaković



6. Ulaz u rimski Panteon

Red. br. 4

1. **Stela kralja Zmije**
2. Stele of the King Serpent
3. Mladen Pejaković
4. Crtež iz knjige
5. Louvre
6. Polje prizora je zlatna pačetrovina \hat{E} auron, a u njemu još jedna za prizor grada i zmije
7. M. Pejaković: *Zlatni rez*, rukopis knjige, Zagreb, 1999.
8. Mladen Pejaković



5. Visina Sunca u meridijanu određuje likove i njihove položaje

Red. br. 6

1. **Ulaz u rimski Panteon**
2. Entrance in the Roman Panteon
3. Mladen Pejaković prema crtežu Palladia
4. Crtež iz knjige
5. Mladen Pejaković, osobna arhiva
6. Kada bismo manju stranicu dvokvadrata odredili s pet modula, u dublu bi ih bilo deset, pa bi dijagonala takva dubla iznosila približno 11 modula ($5^2 + 10^2 = 125 \approx 11^2$). Lijevo i desno od srednjega kvadrata su *zlatni* pravokutnici. U njima se na poznat način prebacuju manje stranice na veće, čime se stvaraju sve manje *zlatne* pačetrovine.
7. M. Pejaković: *Zlatni rez*, rukopis knjige, Zagreb, 1999.
8. Mladen Pejaković

Crtež u transdisciplinarnom području

Teorija determinističkoga kaosa revolucija je koja je stvorila novu znanost. Ona je u punom smislu *transdisciplinarna teorija*, jer ne prelazi samo granice znanstvenih disciplina nego i sadašnje granice znanosti, pa obuhvaća sve oblike čovjekova djelovanja. Prema toj teoriji, u svim prirodnim pojavama i u svako vrijeme, uvijek se mora računati s prelaskom »otoka reda« u stanje determinističkoga kaosa kao i s prelaskom kaosa u stanje reda. Kaos ne djeluje samo razorno nego i stvaralački. Kada su sustavi u dostatno neuravnoteženom stanju, kakvo nastaje npr. u društvenim krizama ili prirodnim katastrofama, oni imaju mnogo stupnjeva slobode i djelomice su otvoreni na dotok energije, materije i informacija. Time se potiču sve veće fluktuacije sustavnih parametara. Za živa je bića znakovito *selektivno katalitičko djelovanje*, kojim se te fluktuacije svakim novim ciklusom odvijaju na sve višoj razini razvitka. Nestabilnost u tim uvjetima u tom slučaju ne vodi do daljnje entropije nego tjera sustav u skokoviti razvitak, dovodi do *mutacijskih tranzicija*.

Razvitak teorije kaosa pokazao je da su za shvaćanje dubine kaotičnih sustava nedovoljna statistička sredstva, linearne i nelinearne regresije ili strukturalne jednadžbe. Međutim, grafički prikazi bitno pomažu boljem razumijevanju kaosa, gdje ta tradicionalna analitička oruđa zatajuju. *Vizualni prikazi pospješuju spoznajnu sposobnost* u znanstvenom procesu, jer se složeni odnosi mogu najprije pojmiti vizualno. Ono što se zbog složenosti više ne može misliti, grafičkom obradom postaje dostupno ljudskoj intuiciji.

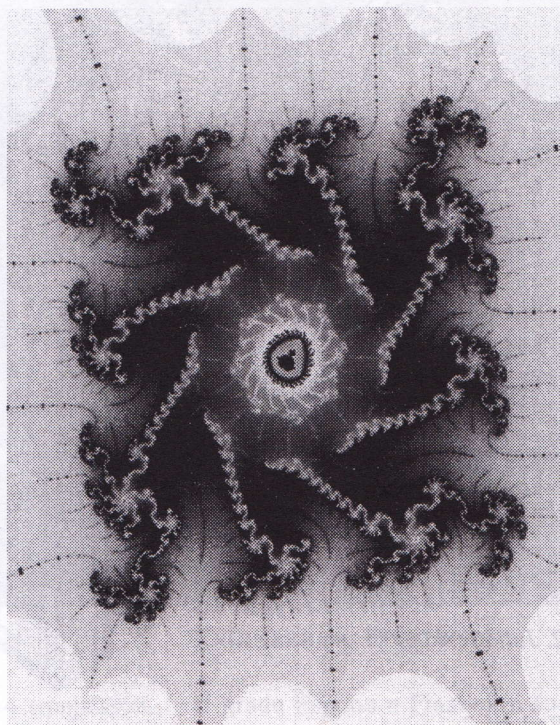
Procesi vizualnog modela determinističkoga kaosa prikazuju dinamične procese pretopljene u fizičke oblike. Odvijaju se u faznom prostoru u kojemu svaka pokretna točka opisuje faze svoje putanje u vremenu. Tako u jednoj slici sažimaju povijest vremena sustava i djelovanje *neobičnih atraktora*. Vrhunac su takvih modela očaravajuće slike Mandelbrotovih skupova u kojima boje imaju zadaću prikazivanja različitih kvalitativnih svojstava i kontrastnog sredstva. Mandelbrotov skup potiče naš *osjećaj lijepoga*, harmoničnog sklada reda i nereda, svojstvenog prirodnim predmetima. Možda je to izraz naslućenog ali još dovoljno neshvaćenog sklada s oblikovnim načelima prirode, kojima naš mozak zahvaljuje svoju građu. Estetskim vrijednostima vizualni modeli fraktalne geometrije uskladili su tvrdu znanost s osjećajem za neukročenu, neciviliziranu i nepripitomljenu prirodu. Taj jezik omogućuje cjelovitije shvaćanje ukupnog organizi-

rajućeg i usmjeravajućeg, konativnog, a ne samo *racionalno-činjeničnog* sadržaja znanstvenih sustava. U našem shvaćanju svijeta samo je malena količina stvari važna. Stoga se turbulentni fluidi organiziraju u sliku na većem broju razina detaljnosti. Ta se pojava u vizualnim modelima teorije determinističkoga kaosa naziva *samosličnost*.

Time je teorija determinističkoga kaosa približila znanost umjetnosti. Tako je postala *činilac otvaranja prostora za umjetnost u vizualnim prikazima znanstveno utvrđenih kvantitativnih odnosa*.

Božidar Jušić

Slijedi pregled izložaka koji su na izložbi predstavljali crtež u transdisciplinarnom području.



1. Mandelbrotov skup

Red. br. 1

1. Mandelbrotov skup
2. Mandelbrot Set
3. Benoit Mandelbrot, 1977
4. računalni ispis u boji, 26,5 cm x 21cm
5. Internet
6. Fraktalna geometrija je termin što ga je skovao B. Mandelbrot 1977. god. kako bi opisao svoj-

stva nekih prirodnih fenomena, primjerice, obalne crte. Ta crta kad se gleda na bilo kojoj razini detalja teži prikazivanju iste razine razvedenosti; neka vrsta statističke samosličnosti. Fraktalna geometrija omogućuje opisivanje nekih aspekata takvih sveprisutnih fenomena u prirodi i njihove težnje ka samosličnosti. U računalnoj je grafici termin fraktal poopćen na objekte koji nisu bili uključeni u izvornu Mandelbrotovu definiciju.

7. Frame, M., Robertson, J.: *A Generalized Mandelbrot Set and the Role of Critical Points*, Computers and Graphics, 16, 1, 1992, 35-40

Jušić, B.: *Vizualni znanstveni modeli između znanosti i umjetnosti (Približava li se znanost umjetnosti?)*, u: Lapaine, M. (ur.): *Crtež u znanosti*, Zagreb, 1998, 25-40

Mandelbrot, B.: *Fractals: Form, Chance and Dimension*, Freeman, San Francisco, 1977;

8. Božidar Jušić



2. Juliaov skup

Red. br. 2

1. **Juliaov skup**
2. Julia Set
3. Gaston Julia, 1914
4. računalni ispis u boji, 26,5 cm x 21cm
5. Internet
6. Dva su najpoznatija fraktalna objekta Juliaov skup i Mandelbrotov skup. Oni se generiraju s pomoću pravila $x \rightarrow x^2 + c$ (i mnogih drugih — to je najjednostavnije i najpoznatije), gdje je x kompleksni broj.

7. Hoggar, S. G.: *Mathematics for Computer Graphics*, Cambridge University Press, 1994

Julia, G.: *Sur l'iteration des fonctions rationnelles*, J. Math. Pure Appl. 1918, 8, 47-245

Jušić, B.: *Vizualni znanstveni modeli između znanosti i umjetnosti (Približava li se znanost umjetnosti?)*, u: Lapaine, M. (ur.): *Crtež u znanosti*, Zagreb, 1998, 25-40.

8. Božidar Jušić

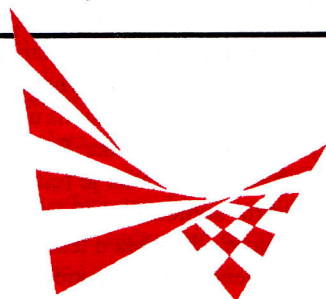


3. Barnsleyjeva paprat

Red. br. 3

1. **Barnsleyjeva paprat**
2. Barnsley's Fern
3. Michael F. Barnsley, 1985
4. računalni ispis u boji, 26,5 cm x 21cm
5. Internet
6. S pomoću algoritma koji je razvio matematičar M. Barnsley moguće je afnim preslikavanjima dobiti realistične slike složenih struktura. Pritom se upotrebljava neki rekurzivni algoritam koji se sastoji od konačnog broja afnih preslikavanja što se mogu zadati dvjema linearnim jednadžbama: $x' = ax + by + e$, $y' = cx + dy + f$. Barnsleyjeva paprat primjer je modeliranja prirodnih oblika s pomoću ponavljanja sustava funkcija prema unaprijed određenim pravilima. Autor taj postupak naziva *igrom kaosa*.
7. Barnsley, M. F.: *Fractals everywhere*, Academic Press, 1988
Jušić, B.: *Vizualni znanstveni modeli između znanosti i umjetnosti (Približava li se znanost umjetnosti?)*, u: Lapaine, M. (ur.): *Crtež u znanosti*, Zagreb, 1998, 25-40.
8. Božidar Jušić

Vijesti, izvješća i najave



GODIŠNJA SKUPŠTINA HDKGKIG-A

Dana 28. 9. 1998. održana je u Vijećnici AGG fakulteta u Zagrebu godišnja skupština Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku.

Predsjednica Društva izvijestila je o radu Društva i aktivnostima njegovih članova od prethodne godišnje skupštine. Istaknuto je da je 8. 12. 1997. učinjena doregistracija Društva. Izdan je 2. broj časopisa KoG, u veljači 1998. održan je tematski skup, a u rujnu iste godine 4. znanstveno-stručni kolokvij.

Tajnica Društva izvijestila je o financijskom poslovanju. Slijedila su izvješća Izdavačkog savjeta i Nadzornog odbora. Nakon prihvaćanja izvješća razriješeni su dužnosti stari članovi u tijelima upravljanja te izabrani novi. Predsjednica HDKGKIG-a ponovno je dr. sc. V. Ščurić, dok je za dopredsjednicu izabrana dr. sc. A. Slipečević. Tajnica Društva i dalje je dr. sc. I. Babić, a zamjenica tajnice je mr. sc. N. Sudeta. Izabrano je i devet članova Upravnog odbora, tri člana Nadzornog odbora, tri člana Izdavačkog savjeta te sedam članova redakcije časopisa.

Usvojen je plan rada Društva za iduću godinu, koji sadrži organizaciju tematskog skupa u veljači 1999., znanstveno-stručnog skupa u rujnu 1999., izdavanje novog broja časopisa KoG te razmjenu časopisa.

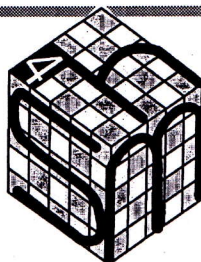
Ivanka Babić

4. ZNANSTVENO-STRUČNI KOLOKVIJ HDKIGKIG-A

U Zagrebu, u Vijećnici AGG fakulteta, 28.09.1998. održan je 4. znanstveno-stručni kolokvij. Organizator je bilo Hrvatsko društvo za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku. Skup je djelomice financiralo Ministarstvo znanosti i tehnologije RH, a sponzor je bio Građevinski fakultet u Zagrebu. Na skupu je bilo tridesetak sudionika iz cijele Hrvatske. Gost skupa bio je uvaženi geometričar prof. dr. sc. Emil Molnár iz Instituta za matematiku u Budimpešti. Izlaganja su bila sljedeća:

- *prof. dr. sc. B. Kučinić*: Sjećanje na profesora Stanka Bilinskoga
- *dr. sc. A. Slipečević*: O žarišnim krivuljama pramenova konika
- *prof. dr. sc. E. Molnár*: How to Design Nice Tilings?
- *doc. dr. sc. Z. Božikov*: O simetričnim dizajnima s parametrima (69,17,4)
- *prof. dr. sc. Z. Čerin*: Potraga za kubikama trokuta
- *mr. sc. S. Gorjanc*: Izvođenje pravčastih kubika pomoću animacije u Mathematici 3.0
- *mr. sc. J. Beban-Brkić, mr. sc. N. Sudeta*: Mjesto geometrije u nastavi
- *mr. sc. B. Hajsig*: Stota obljetnica nastave Nacrtna geometrije na Sveučilištu u Zagrebu
- *Izvješća s kongresa*: Austin 98. (*N. Sudeta*)
Balatonföldvar 98. (*L. Pletenac*)

4. SUSRET NASTAVNIKA MATEMATIKE



U Zagrebu je od 2. do 4. srpnja 1998. održan 4. susret nastavnika matematike u organizaciji Hrvatskoga matematičkog društva. Susretu je prisustvovalo 750 nastavnika iz svih krajeva Hrvatske. Tijekom tri dana održan je veći broj predavanja. Organiziran je i okrugli stol *O anketi HMD-a i novim udžbenicima*.

Članovi HDKGKIG održali su na 4. susretu nastavnika matematike sljedeća predavanja:

- *Jelena Beban-Brkić, Nikoleta Sudeta*: U potrazi za mjestom geometrije u nastavi
- *Damjan Jovičić, Jelena Beban-Brkić*: Jedna zaboravljena formula za računanje površina i volumena
- *Miljenko Lapaine*: "Zadaci" s razredbenih ispita na tehničkim fakultetima

• *Nikol Radović*: Standardni crtež

U izdanju Hrvatskoga matematičkog društva objavljen je Zbornik radova susreta u opsegu od 319 stranica, formata A5, a nosi oznaku ISBN 953-97339-0-1. Urednici zbornika su doc. dr. sc. Sanja Varošaneć i Petar Mladinić, prof. Osim tekstova predavanja u zborniku se nalazi popis svih sudionika i program skupa. U uvodnoj riječi prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević je istaknuo: "Posebno raduje činjenica da je interes za ovakve susrete u porastu. To pokazuje da su nastavnici sve svjesniji važnosti ovakvih aktivnosti. Nadajmo se da će poruke s ovog susreta konačno dovesti do toga da političari shvate izuzetnu važnost naobrazbe za razvitak države i da će se prekinuti krajnja nebriga za tu djelatnost koja se manifestira u sramotno niskim plaćama, u odsustvu jasnog i općeprihvaćenog projekta preobrazbe školstva, kao i u čudno provedenim natjecanjima za udžbenike bez prave mogućnosti utjecaja strukovnih udruženja."

Miljenko Lapaine

9th SEFI

9TH SEFI EUROPEAN SEMINAR ON MATHEMATICS IN ENGINEERING EDUCATION

U gradu Espoo u Finskoj, u šumovitu krajoliku zapadno od Helsinkija, od 15. do 17. lipnja 1998. godine održan je "Deveti SEFI europski seminar o matematici u inženjerskoj naobrazbi" (9th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education). SEFI-Europsko društvo za inženjersku naobrazbu (European Society for Engineering Education) osnovano je 1973. godine. Svrha je društva širiti

informacije o naobrazbi inženjera, pospješiti komunikaciju i razmjenu iskustava među nastavnicima, istraživačima i studentima, razvijati suradnju među institucijama koje se bave naobrazbom inženjera, promoviranje suradnje na razini industrija — obrazovne ustanove te pridonositi razvoju i poboljšanju istoga u postojećem socijalnom, kulturnom i gospodarskom okviru.

Matematička radna grupa u sklopu SEFI — udruženja (Mathematics Working Group of SEFI) osnovana je 1982. godine i od tada, približno svake druge godine, organizira seminare o matematici. Ovaj put domaćini su bili kolege s Arcada Polytechnic u Espou, gdje je u glavnoj zgradi, lijepu primjeru suvremene finske arhitekture, održana večina referata uz svu potrebnu tehničku podršku. Nakon zajedničkih plenarnih predavanja, rad seminara odvijao se u dvije paralelne sekcije. Na seminaru je bilo nazočno sedamdesetak matematičara i inženjera iz gotovo svih europskih zemalja. Sudjelovala sam u radu seminara referatom napisanim u koautorstvu s mr. sc. Damjanom Jovičićem, pod naslovom *An Example of the Use of Mathematica*. Izlaganja su tiskana u knjizi *Proceedingsa* (ISBN 952-5260-00-3), koju mogu dobiti na uvid svi zainteresirani.

Dobra organiziranost, susretljivost, urednost i skrb za uspješnost seminara te želja da se svi sudionici ugodno osjećaju nisu mogli biti nepriječeni i svakako su vrijedni hvale i učenja.

Sljedeći je seminar planiran za 2000. godinu, u gradu Miskolcu u Mađarskoj.

Jelena Beban-Brkić



8. MEĐUNARODNA KONFERENCIJA O TEHNIČKOJ RAČUNALNOJ GRAFICI I NACRTOJ GEOMETRIJI
U Austinu, glavnom gradu Teksasa, od 31. srpnja do 3. kolovoza 1998. održana je 8. međunarodna konferencija o tehničkoj računalnoj grafici i nacrtnoj geometriji (8th Inter-

national Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry). Pokrovitelj konferencije bilo je Međunarodno društvo za geometriju i grafiku (International Society for Geometry and Graphics — ISGG), a supokrovitelji Japan Society for Graphic Science (JSGS) i Engineering Design Graphics Division (EDGD) of the American Society for Engineering Education (ASEE). Prethodne su konferencije održane u Vancouveru (1978.), Bejingu (1984.), Beču (1988.), Miamiu (1990.), Melbourneu (1992.), Tokiju (1994.) i Krakovu (1996.). Sljedeća će se 2000. godine održati u Johannesburgu. Svrha je tih konferencija zbližavanje nastavnika i profesora geometrije, tehničke i računalne grafike iz različitih dijelova svijeta radi razmjene znanja i iskustava. Njihova je bitna uloga aktiviranje i razvijanje intelektualnih i društvenih te akademskih i profesionalnih odnosa među sudionicima. Na konferenciji u Austinu okupilo se oko 200 sudionika iz svih krajeva svijeta. Njihova su izlaganja, kao i ranijih godina, svrstana u tri tematske cjeline: teorijsku grafiku i primijenjenu geometriju, tehničku računalnu grafiku te grafičko obrazovanje. U tri knjige Zbornika radova objavljeno je 157 radova na ukupno 772 stranice. Zastupljenost autora po pripadnosti kontinentima izgleda ovako: Azija 53, Europa 47, Sjeverna Amerika 25, Južna Amerika 9, Australija 6, Afrika 5. Osim toga u Zborniku je objavljeno 12 radova koji su rezultat suradnje autora s različitim kontinenta, poglavito na relacijama SAD-Japan i Europa-Sjeverna Amerika. Taj je podatak nedvojbeno potvrda da konferencija ostvaruje svoju svrhu, a ujedno je i pokazatelj važnoga puta u razvoju struke. Naime, za očekivati je da će usporedbe rezultata istraživanja u području grafičkog obrazovanja, koje primjerice sprovode autorice iz Poljske, Njemačke, Japana i SAD-a, biti relevantni pokazatelji za razvoj metodike.

Grafički prikazi poput crteža, dijagrama, slika ili ilustracija, bili oni nepokretni ili animirani, temeljni su i lak način ljudske spoznaje. Oni su

važno sredstvo za priopćavanje geometrijskih informacija. Važnost grafičkog prikazivanja i vizualizacije bit će sve veća u računalnoj multi-medijskoj eri. Znanost i tehnologija geometrije i grafike, dakle, vitalna su i uzbuđujuća područja istraživanja i podučavanja. Austinska konferencija, kao i one koje su joj prethodile, razmatrala je mnoštvo pitanja o grafičkom obrazovanju i znanstveno-tehničkim istraživanjima u području geometrije i grafike. Ipak, pomalo čudi činjenica da je relativno malen broj sudionika te konferencije, koja se održavala u tehnološki vrlo razvijenoj zemlji, upotrebljavao snagu vizualizacije koju omogućuje današnja tehnologija te da su teme o uporabi Interneta u nastavi bile samo dotaknute.

Rad konferencije započeo je pozvanim predavanjima, koja su održali K. Fuchigami iz Japana, H. Stachel iz Austrije, J. J. Baracs iz Kanade i G. R. Bertoline iz SAD-a. Nastavljen je sjednicama na kojima su sudionici izlagali svoje referate. Svaki je govornik imao na raspolaganju 20 minuta. S obzirom na velik broj referata, rad se odvijao istodobno u četiri dvorane, pri čemu su izlaganja bila razvrstana po temama. Posljednjeg dana konferencije održan je forum o terminologiji u geometriji i grafici. Najprije je sedam predavača pokušalo definirati pojmove geometrija i grafika. Da to nije sasvim jednostavno pokazala je rasprava koja je uslijedila. Izlaganja i zaključci bit će objavljeni u časopisu Međunarodnoga društva za geometriju i grafiku. S obzirom na prethodne konferencije austinska će ostati u sjećanju kao relativno mirna, bez vatrenih diskusija i znatnije suprotstavljenih stavova u svezi sa strukom.

Najbrojniju delegaciju (pedesetak članova) činili su sudionici iz Japana, koji su dominirali po broju referata pa onda i po ukupnom vremenu izlaganja. Na žalost, zbog teškoća s engleskim izgovorom te velike količine podataka koje su željeli iznijeti, znatan je broj njihovih izlaganja bio nerazumljiv većini slušatelja. Hrvatska je delegacija također bila brojna. Pet radova objavljenih u Zborniku naši su autori uspješno prezentirali na konferenciji.

- Jelena Beban-Brkić: *Focal Curve within the Conic Pencils in I_2* (Žarišna krivulja pramena konika u I_2),
- Sonja Gorjanc: *The Generation of Ruled Cubics by Using Mathematica 3.0* (Generiranje pravčastih kubika pomoću programa Mathematica 3.0),
- Miljenko Lapaine i Damjan Jovičić: *Valentin's Problem* (Valentinov problem) — izlagao M. Lapaine,
- Nikoleta Sudeta: *Descriptive Geometry Education and Curriculum for Architectural Engineering Students* (Podučavanje nacrtnge geometrije i nastavni program za studente arhitekture), te
- Ivka Tunjić i Miljenko Lapaine: *Croatian State Boundary at the Sea* (Hrvatska državna granica na moru) — izlagala Ivka Tunjić.

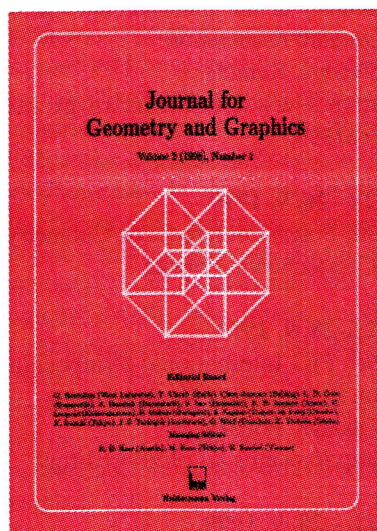
Osim toga, članovi su hrvatske delegacije sudjelovali u radu međunarodnoga nadzornog odbora te u vođenju pojedinih sjednica konferencije. Ostvarenje tako velikog učešća naših sudionika novčano su pomogli Ministarstvo znanosti i tehnologije RH, Arhitektonski, Građevinski i Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Institut Otvoreno društvo, Državna geodetska uprava, te Wolfram Research Co.

Domaćin konferencije bio je College of Engineering, The University of Texas at Austin. Austin je grad srednje veličine, središte tekasaške državne vlade, ima oko 500 000 stanovnika i sveučilišno je središte. Sveučilište obuhvaća više od 120 zgrada, odnosno 15 koledža i škola s 48 000 studenata te 2700 nastavnog osoblja s punim radnim vremenom. Konferencija je održana u prostorijama Thompsonova konferencijskog središta (Thompson Conference Center — TCC).

U sjećanju na austinsku konferenciju ostat će nam problemi s prtljagom nastali zbog kašnjenja zrakoplova, i nesnosna vrućina koja se stalno kretala iznad 40° C. Zaboravivši to, mogli bismo reći da je to bila uspješna konferencija.

Sonja Gorjanc
Miljenko Lapaine

JOURNAL FOR GEOMETRY AND GRAPHICS



Međunarodno društvo za geometriju i grafiku (International Society for Geometry and Graphics — ISGG), kojeg je djelovanje usko vezano uz djelovanje Konferencije (ICEGDG), počelo je 1997. godine izdavati časopis *Journal for Geometry and Graphics*. Časopis izlazi dva puta godišnje i do sada su tiskana tri broja, dva za 1997. i jedan za 1998. godinu. U njemu se objavljuju znanstveni radovi iz područja teorijske grafike (Theoretical Graphics), primjene (Applications) te grafičke izobrazbe (Graphics Education). Izdavač je poduzeće Helderemann Verlag iz Njemačke, neprofitni izdavač znanstvene matematičke literature. Poduzeće je osnovano 1978. i do sada je izdalo pedesetak knjiga i 7 časopisa. Visoki znanstveni standardi i kvaliteta tiska, te slobodne elektronske verzije osnovne su pretpostavke na kojima taj izdavač planira svoju budućnost. Pridodamo li tome i visoku stručnost izdavačkog odbora, možemo očekivati da će taj časopis, iznimno važan za našu struku, nastaviti redovito izlaziti. U Hrvatsku, za sada, stiže 7 primjeraka časopisa. Na žalost, ni jedan u neku sveučilišnu knjižnicu. Stoga zainteresirane upućujemo na kontakt s Hrvatskim društvom za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku (HDKGKG) ili na adresu

<http://www.geometrie.tuwien.ac.at/jgg>

Sonja Gorjanc

KONSTRUKTIVE GEOMETRIE

Balatonföldvár,
14-18. 9. 1998.



U Balatonföldváru (u hotelu Jogar), na jezeru Balatonu, održana je treća međunarodna konferencija pod nazivom "Konstruktivna geometrija", u izvrsnoj organizaciji prof. dr. Hellmutha Stachela iz Beča, dr. Marte Szilvási-Nagy, dr. Katalin Bognár-Máthé i prof. dr. Emila Molnára iz Budimpešte.

Šezdesetak sudionika iz Mađarske, Austrije, Hrvatske (čak šest), Češke, Njemačke, Poljske i Slovačke radilo je u tri sekcije, a svako je predavanje trajalo (s diskusijom) pola sata. Sekcije su grupirale radove iz gotovo svih područja geometrije (osim algebarske) te radove vezane uz nastavu geometrije. Na konferenciji se raspravljalo o aktualnim klasičnim temama i konstruktivnim metodama s primjenom moderne tehnologije. Pokazalo se da se računalo upotrebljava ne samo za vizualizaciju već je ono postavilo geometriji nove zadatke.

U čast pokojnom prof. Gyuli Strommeru utemeljena je i prvi put dodijeljena međunarodna nagrada "Gyula Strommer".

Članice Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku održale su zanimljive referate:

- *Mr. Jelena Beban-Brkić*: With software Mathematica supported analysis of conic pencils in I_2 .
- *Dr. Zdravka Božikov*: On symmetric designs with parameters (101, 25, 6)
- *Dr. Ana Sliječević*: Die Brennpunktkurven in Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittscharen der isotropen Ebene
- *Mr. Lidija Pletenac*: Deduction of cubics with conic at infinity
- *Mr. Sonja Gorjanc*: The generation of ruled surfaces by using Mathematica 3.0

Dr. Blaženka Divjak s Fakulteta za

organizaciju i informatiku (FOI) u Varaždinu održala je referat *Note on pseudo-Galilean space*.

Radovi nisu objavljeni u cijelosti, ali tiskana je knjiga sažetaka.

Konferencija je besprijeckorno organizirana i obogaćena lijepim društvenim programom (izlet brodom po jezeru, posjet vinskom podrumu, sportske aktivnosti). Vrlo je dojmliiva skrb organizatora o svemu, od kvalitete hotelske usluge, umjetničkoga koncerta i dobrodošlice s tortom, do opremljenosti svih dvorana za predavanja i posluživanja u svakoj pauzi. Izlagalo se na njemačkom i engleskom jeziku.

Ta je konferencija sasvim sigurno pridonijela boljem upoznavanju, razumijevanju i razmjeni iskustava među geometričarima susjednih zemalja usred stare Europe.

Lidija Pletenac

PREDSTOJEĆI SKUPOVI

12.-14. 5. 1999.

Geodetske osnove i zemljišni informacijski sustavi
Hrvatsko geodetsko društvo,
Opatija.
<http://pubwww.srce.hr/geo>

24.-29. 5. 1999.

220 Years of Geodetic Education in Russia, 220th Anniversary of Moscow State University of Geodesy and Cartography
Moskva, Rusija.

30. 5. - 4. 6. 1999.

Geometrietagung im Stift Vorau
Graz, Austrija

11-16. 7. 1999.

18th International Conference on the History of Cartography
Atena, Grčka.

18.-30. 7. 1999.

IUGG 99, XXII General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics
Birmingham, Velika Britanija.
<http://www.bham.ac.uk/IUGG99/>

14.-21. 8. 1999.

19th International Cartographic Conference and 11th General Assembly of the International Cartographic Association
Ottawa, Kanada.
<http://www.ccrs.nrcan.gc.ca/ica1999>

23.- 26. 9. 1999.

All-Polish Conference on Geometry,
Czestochowa, Poljska

25.-28. 9. 1999.

9th FIG International Symposium on Deformation Measurements
Olsztyn, Poljska.
<http://kosmos.art.olsztyn.pl/fig9>

27. - 28. 9. 1999.

5. znanstveno-stručni kolokvij HDKGIK
Zagreb, Hrvatska

studeni 1999.

Automatizacija u prometu '99
19. skup o prometnim sustavima.
Pula, Hrvatska;
Trst, Venecija - Italija.
<http://www.rasip.fer.hr/KoREMA>

7. - 11. 2. 2000.

The 7th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Digital Interactive Media 99
Plzen, Češka

10.-14. 7. 2000.

3ecm Barcelona 2000
Shaping the 21st century
3rd European Congress of Mathematics
Barcelona, Španjolska
<http://www.iec.es/3ecm>

20.-28. 8. 2002.

International Congress of Mathematicians
Beijing, Kina.
<http://www.cms.org.cn>

Prikazi

Petar Mitov i Igor Mitov:

ZBIRKA ZADATAKA IZ NACRTNE GEOMETRIJE



Nakladnik: Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu, 1998.

Edicija: Udžbenici Sveučilišta u Splitu — Manualia Universitatis Studiorum Spalatensis

Autori: Petar Mitov, Igor Mitov

Recenzenti: Prof. dr sc. Željko Domazet, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu
Prof. dr. sc. Ante Krstulović, Fakultet prirodoslovno-matematičkih i odgojnih područja Sveučilišta u Splitu

Lektor: Prof. Mirko Znaor

Posljednjih je godina objavljeno nekoliko kvalitetnih srednjoškolskih i visokoškolskih udžbenika i zbirki zadataka iz nacrtne geometrije. KoG je u *Prikazima* predstavljao te udžbenike uz poneku riječ pohvale.

O knjizi koja je pred nama, a izašla je kao udžbenik *Sveučilišta u Splitu* u nakladi splitskog Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, ne samo da nije moguće napisati riječ pohvale, nego je nužno uputiti joj najozbiljnije kritike. Ljudima od struke — geometričarima i inženjerima koji su se sretali s nacrtnom geometrijom, dovoljno će biti pročitati dvije ili tri nasumce odabrane stranice knjige kako bi se složili s tom ocjenom. A učenici i studenti, koji su učenjem ove lijepe discipline uspjeli shvatiti da je osnovna svrha nacrtne geometrije, kao teorije projiciranja, razvijanje prostornog rasuđivanja i "opismenjavanje" u grafičkom komuniciranju preko crteža, neće u ovoj knjizi naći ništa od toga, štoviše, ostat će zbunjeni.

Knjiga sličij lošoj "kuharici" sastavljenoj od niza recepata, koji imaju namjeru na čudne i nerazumljive načine objasniti crteže na kojima se ništa ne vidi.

Ako se promatraju samo crteži, a zanemari se nepreciznost, loša tehnička izvedba, netehnički opis, katastrofalan geometrijski dojam, može se reći da su najvećim dijelom čak i korektni, ali samo kao loše skice. Smatramo, međutim, da je u današnje vrijeme nedopustivo prihvatiti čak i maturalnu radnju a kamoli udžbenik iz geometrije s tako niskom razinom grafičke izvedbe.

A tek hrvatski jezik! Pojedini odlomci ostavljaju dojam da je autor stranac koji je loše naučio hrvatski jezik. Za dijelove teksta koji su gotovo korektni može se ustanoviti da su nepažljivo prepisani iz nekog postojećeg udžbenika (usporedite npr. tekst od str. 189. do 191. s odgovarajućim tekstom iz knjige citirane u literaturi navedenog udžbenika pod brojem 5). Analizirajući tekst sa strukovnog stajališta, može se zaključiti da autor nedosljedno rabi beogradsku terminologiju, a uvodi i neke "novine" — npr. "projicira kocku u pravcu" (str. 83), "određuje najmanju udaljenost usporednih pravaca" (str. 97), "preklapa ravninu bez korištenja osnog probodišta" (str. 108), "određuje pravu veličinu ravnine" (str. 127), "Postoje tri priklopnice specijalna pravca na ravnini" (str. 25)? A korektnost i istinitost ove rečenice: "Pravac n je okomit na ravninu α , ako su njezine projekcije n' i n'' okomite na tragove α_1 i α_2 zadane ravnine α " (str. 39)? Je li vam jasan zadatak 6.5.28 sa str. 74?

S metodičkog stajališta, može se primijetiti da se autori nepotrebno mnogo trude objasniti neke jednostavne i evidentne zadatke, dok za složenije primjere (presjeci i prodori ploha) upućuju korisnika samo na sliku. A događa se da tekst zadatka uopće nema veze s ponuđenom slikom (zadatak 14.1.3 i sl. 268 na str. 207 i 208). Kao što je i red, knjiga ima lektora, prof. Mirka Znaora, što se iz navedenog ne može zaključiti.

Knjiga ima i recenzente, prof. dr. sc. Željka Domazeta s Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodograd-

nje i prof. dr. sc. Antu Krstulovića s Fakulteta prirodoslovno-matematičkih znanosti i odgojnih područja (!) Možda oni i jesu visokostručni profesori za područje strojarstva, ali sigurno ne i za geometriju. Kako bi bilo, primjerice, da se jedan vrsni geometričar drzne biti recenzentom udžbenika iz područja biologije ili medicine kako bi učinio uslugu prijatelju-autoru, studentu kemije, kojemu se prohtjelo napisati takav udžbenik? Ako bi takav udžbenik i ugledao svjetlo dana, možda bi sve i nezapaženo prošlo. Ali, ako jedno uvaženo Sveučilište, kao što je ono u Splitu, na sve to stavi blagoslov svojim imenom i žigom, onda odgovorni stručnjaci imaju moralnu obvezu reagirati.

Pitamo se, zbog čega su se autori "udžbenika" (umirovljeni inženjer strojarstva i njegov sin student strojarstva) prihvatili posla za koji nisu stručni? No to je njihov problem. Odgovornost za izdavanje "Zbirke zadataka iz nacrtne geometrije" snose oni koji su to omogućili (recenzenti, lektor, splitsko Sveučilište), pa bi oni morali snositi i posljedice. Takva je knjiga potpuno neprihvatljiva kao sveučilišni udžbenik, i to do te mjere da je možemo smatrati štetnom za našu mladež.

Ostaje pitanje: hoće li netko od odgovornih iz Sveučilišta u Splitu poduzeti korake i kakve? Sveučilišni nastavnici kvalificirani za to područje, okupljeni u udrugu HDKGIGK, smatraju se kompetentnima predložiti ZABRANU knjige.

Čitatelju koji sumnja u ispravnost tako oštre kritike ostavljamo mogućnost uvida u ovaj udžbenik obraćanjem na adresu udruge Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku.

Slobodni smo na kraju istaknuti, i uputiti neupućene, na bogatu i vrlo kvalitetnu literaturu iz područja nacrtne geometrije na našem jeziku za sve razine izučavanja i primjene (udžbenici, zbirke, skripta). Navedimo samo neke autore: V. Niče, D. Mutabdžija, L. Rajčić, K. Strubec-ker, I. Paal, Z. Kurnik, D. Palman, B. Pavković, I. Babić, S. Gorjanc, A. Slipečević, V. Szirovicza, K. Horvatić-Baldasar i drugi.

Hrvatsko društvo za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku

NAGRAĐENI STUDENTSKI RAD

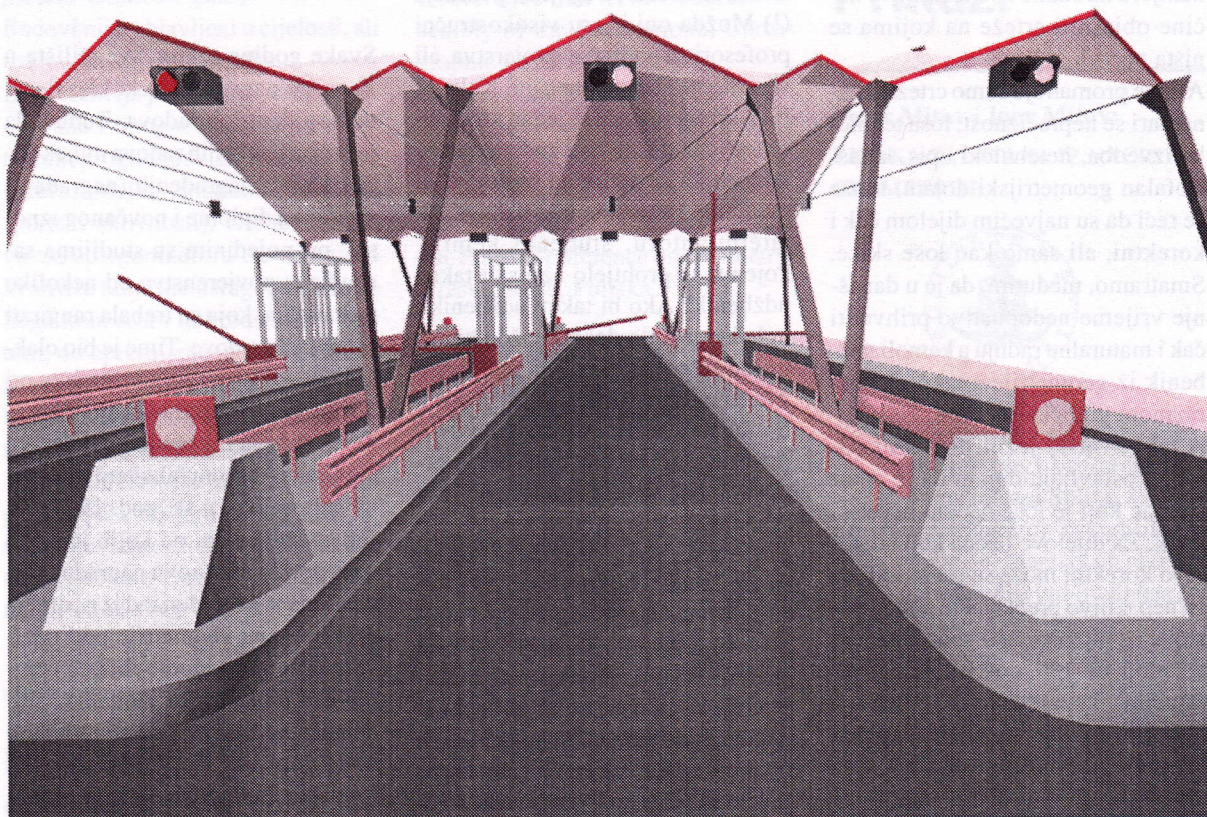
Svake godine rektor Sveučilišta u Zagrebu nagrađuje nekoliko desetaka studentskih radova. Budući da je broj prijavljenih radova uvijek veći od broja nagrađenih (nagrada se sastoji od diplome i novčanog iznosa), pri pojedinim su studijima sastavljena povjerenstva od nekoliko nastavnika, koja su trebala rangirati prijavljene radove. Time je bio olakšan rad povjerenstva na rektoratu pri donošenju odluke o broju nagrađenih radova iz pojedine struke.

Na Građevinskom fakultetu u Zagrebu natjecalo se u šk. god. 1997./98. sedam studenata, od kojih je prvih troje dobilo rektorovu nagradu. Među njima je nagrađen rad iz područja primijenjene geometrije pod nazivom "Primjena hiperboličkog paraboloida na krovnim ploham" studenta Nine Burića, pod mentorskim vodstvom mr. Vlaste Szirovicze. Preostali radovi dobili su nagradu dekana, a svi su bili izloženi ispred Vijećnice u Kačićevoj ulici 26. Sa zadovoljstvom mogu naglasiti da su prvi put nagrade predane studentima na početku zasjedanja Nastavničkog vijeća Građevinskog fakulteta, tako da su svi nastavnici imali priliku upoznati svoje najbolje studente i zapljuskati im. Takav će način dodjeljivanja nagrada postati tradicijom.

NINO BURIĆ:

PRIMJENA HIPERBOLIČKOG PARABOLOIDA NA KROVNIM PLOHAMA

Primjena pravčastih ploha na krovovima objekata kao što su benzinske postaje, autobusni terminali i stajališta, terase i dr. izazov su svakom studentu jer uz relativno malo predznanja stečenog u poglavlju Plohe kolegija Primijenjena geometrija koji se predaje u II. semestru studija na Građevinskom fakultetu u Zagrebu, pružaju autoru zadovoljstvo kreativnog stvaralaštva. Budući da među izvedenim objektima te namjene nalazimo relativno malen broj vizualno dopadljivih, velik je



Perspektiva objekta

poticaj za takvu vrstu projektiranja. U navedenom radu odabrane su naplatne kućice na autocesti, koje treba zaštititi od padalina i insolacije odgovarajućim krovštem — nadstrešnicom, koja mora kvalitetno riješiti problem odvodnje oborinskih voda (voda ne smije curiti po prometnom traku) i ne smije ometati vidljivost.

Većinu plohe pokrivaju tri glavna hipara, od kojih su dva bočna jednaka i međusobno simetrična, a srednji je hipar element koji bi se u slučaju pokrivanja širih površina (više prometnih trakova) modularno multiplicirao. Svaki je od glavnih hipara smješten iznad jedne naplatne kućice. Iznad razdjelnih otoka nalaze se manji mansardni oblici, ukupno šest, koji su svi istih dimenzija. Ravnalice hipara leže u istoj krovnoj ravni, te ih ona povezuje u jedinstvenu cjelinu.

Konstrukcija je zamišljena kao armiranobetonska ljuska koja stoji na čeličnim stupovima. Kosi čelični stupovi rješavaju horizontalnu sta-

bilnost u svim smjerovima, te se broj točaka na kojima konstrukcija stoji (16) smanjuje na deset točaka na tlu. U visini ležišnih točaka projektiran je vjetrovni vez, koji služi kao nosač rasvjetnih tijela i napajanja. Najniža se točka krovne plohe nalazi na 4,5 metra, što je uvjetovano zadanim slobodnim profilom za ceste za javni promet vozila. Umjesto armiranobetonske ljuske konstrukciju je moguće izvesti u drvu, čeliku ili prostornom rešetkastom konstrukcijom s različitim pokrovima, kao npr. lim, PVC i dr.

Struktura hipara nudi osobito pogodno rješenje odvodnje oborinskih voda. Krovna ravnina završava mansardnim oblicima koji sprječavaju izlivanje krovni voda po prometnim površinama. Te se vode uvalama slijevaju u najniže točke krovne konstrukcije, a odatle niz šuplje čelične stupove (čelične cijevi određenog promjera) koji kanaliziraju vodu u recipijent. Zbog učinkovita prikupljanja krovni voda i njihova kanaliziranja, završetci čeličnih stupova

konstruirani su s ljevkastim proširenjima koja onemogućuju vrtloženje i osiguravaju najbolji prihvat krovni voda.

Cijela je konstrukcija potpuno simetrična s obzirom na uzdužnu i poprečnu os te se time uvelike pojednostavljuje i proračun i sama izvedba zbog opetovane uporabe istih oblika i oplata. Cjelokupna je ploha također dinamična i razigrana, za razliku od većine takvih objekata u Hrvatskoj i u inozemstvu, a ipak je relativno jednostavna za proračun i izvedbu (budući da je hipar ploha s dva sustava izvodnica).

Rad je izveden na PC računalu uz upotrebu programa AutoCAD 14 i njegovih mogućnosti za 3D prikaz.

Vlasta Szirovicza

ZAPISI IZ IRANA

izložba fotografija

Od 26. 10. do 20. 11. 1998., u izložbenom prostoru knjižnice "Vladimir Nazor" (Ulica grada Gualdo Tadino 4), bila je postavljena izložba fotografija autorice Jelene Beban-Brkić, članice našega Društva.

S fotografskim senzibilitetom, kojeg se ne bi posramio ni National Geographics, autorica priča o životu nomadskih plemena s jugoistoka Irana u kojem je boravila tri godine. Živopisnim fotografijama što prikazuju svakodnevni život (Veliko spremanje, Promjena ispaše, Predenje vune, Tkanje tepiha, Voćarnica, Sitičarnica, Prodaja ribe, Pekara,...) i portretima (Osmijeh, Majka s djetecom, "Great Lady of the Family", Kraj,...) snimljenima tijekom jednog od njezinih putovanja te izložbom uporabnih predmeta s karakterističnim perzijskim motivima koje je skupila, dojmljivo nam približava dio toga dalekog osunčanog svijeta bogatoga bojom.

U sklopu te autorske izložbe voditeljice knjižnice izložile su razne publikacije (monografije, putopise, knjige poezije, romane...) vezane uz perzijsku umjetnost.

U istom je prostoru 6. 11. održana i tribina na kojoj je autorica prikazala i komentirala videozapise svojih putovanja. Taj polsatni videofilm "Kamerom po Iranu" (Jelenin u potpunosti samostalan autorski rad) posjetitelji izložbe mogli su vidjeti za gotovo cijeloga trajanja izložbe, na žalost bez autorske priče.

Sonja Gorjanc



DIGITALNI KRAJOLICI

BRYCE 3

The Visual Software Computing Company, MetaTools™

Prostor je jedna od prvih fascinacija mislećeg čovjeka. Od razdoblja pećinskih crteža, uz motive, simbole i poruke poslana u vrijeme, odvija se stvaralačka i intelektualna drama: kako predstaviti prostor i događaje u reduciranu mediju s dvije ili tri dimenzije.

Skulptura ili plastika to prividno lako rješava, ali samo na izdvojenim i tehnički savladivim slučajevima kao kratkim citatima stvarnosti, npr. portretima, figurama, simboličnim i kulturnim predmetima. Dvodimenzionalne tehnike brže su i spontanije te pružaju mogućnost prikazivanja složenijih prizora i događaja. Čak se i

na najstarijim pećinskim slikarijama mogu uočiti sadržaji koji pokušavaju obuhvatiti šire vrijeme i prostor, kao današnji stripovi i filmovi. Drugo je svojstvo crteža borba s prostorom i njegovim prikazivanjem, uz uporabu svih mogućih dosjetki i trikova, sve do iluzionizma.

Ukratko, dodirnuti smo bitne činjenice koje tvore i našu današnju civilizaciju: komunikaciju, bilježenje iskustava, "vladanje" prostorom i vremenom. Koliko smo materijalna i tehnička toliko smo i vizualna civilizacija, jer sve (ili gotovo sve) planiramo, bilježimo i posređujemo u nekom vizualnom obliku koji nam,

izgleda, najviše odgovara. Slika zamjenjuje tisuću riječi.

Danas (kao da je već jučer), na pragu trećeg milenija zaista i slutimo prag. Prijelaz u novo doba. Izrazi poput nove tehnologije, tehnologije budućnosti, nove osjećajnosti, latentne tehnike, simulacije, virtualiteta, sintetičkih znanosti, fraktala, kaotičnih sustava, multimedija, globalizacije natuknice su nove epohe. Drukčije ćemo učiti, bilježiti, stvarati, pretvarati i razumjeti svijet oko nas i u nama. Mnogo toga odvijat će se u virtualnoj stvarnosti, koja će otvoriti do sada nedostupne prostore s granice kreativne mašte. Računala

su omogućila inženjerima i arhitektima da svoje građevine, strojeve i mostove vide, obilaze i iskušaju prije izvedbe. Gotovo da i nema tehničke i znanstvene discipline koja se ne služi nekim programom s 3D prikazom. Taj je prikaz "zakon" i u svim vizualnim medijima.

Među mnogim programima, u velikom rasponu cijena, mogućnosti, lakoće uporabe, zahtjevnosti i kvalitete rezultata pojavio se prije nekoliko godina, pod nazivom BRYCE, program za generiranje krajolika namijenjen ilustratorima i kreativcima u vizualnim medijima. Autor Eric Wagner, strastveni crtač krajolika, pokušao je napraviti nadomjestak za svoje umijeće i znanje ne bi li proširio svoj hobi na računalnu sliku. Ostalo je već poznata priča o uspjehu: to vidi prijatelj, pokazuje drugom prijatelju, ovaj kompaniji MetaTools...itd. U nekoliko godina došli smo do inačice BRYCE 3, u koju je integrirana i animacija, pa se izravno može upotrebljavati i u filmskoj industriji. Pri tom su zadržane glavne osobine programa: lak pristup za početnika, visoka intuitivnost, bogatstvo variranja, niska cijena (u usporedbi sa sličnima) te mogućnosti importiranja iz drugih programa.

BRYCE nije zahtjevan u hardveru i lako se instalira na sva današnja PC i Apple Macintosh računala s 24 Mb RAM-a.

Sučelje je neobično i bitno utječe na način rada te percepciju programa. Izvedeno je mekano i taktilnog izgleda, koji tradicionalnim majstorima softvera vjerojatno znači nešto neozbiljno i djetinjasto. No, raditi na

takvu sučelju isto je kao voziti automobil: ubaciti u brzinu, ubrzanje, lagano pritisnuti kočnicu, okret volanom, lagano ubrzati i niz cestu. Nema nikakvih formula, vektora, upisivanja ili pozicioniranja. Kao vožnja automobilom: upravljački mehanizam i grad oko tebe. Za to vrijeme brojke su u pozadini dok nam ne zatrebaju, ako nam uopće trebaju.

Raditi na takvom sučelju iznimno je ugodno i zabavno za svakog početnika, a potreba za priručnikom pojavljuje se tek na višoj razini, kad već dosta dobro poznajemo program i slutimo mogućnosti. Elegantno rješenje za početne probleme u učenju, što baš i nije čest slučaj s većinom složenih programa koji zahtijevaju ozbiljnije predznanje i sasvim određenu liniju upoznavanja. Nadam se da će taj trend "neozbiljnih" sučelja i jednostavnog pristupa programima zahvatiti i one koji su do sada bili namijenjeni samo stručnjacima. Zamislite da vam je ploča radnoga stola veliki plazma-monitor (monitori sljedeće generacije), osjetljiv na dodir, i da vi ponovno radite rukama, transformirajući primitive u nešto nadahnuto i složeno.

Vratimo se BRYCE-u. Gornji dio radnog stola zauzet je s tri izmjenjive radne palete.

Create — paleta za stvaranje objekata, na kojoj osim ploha i tijela (kvadar, kugla, valjak, piramida, stožac i torus) stvaramo stijene, reljefne terene i svjetla. Postoje još arhive složenih "boolean" objekata, stijenja, drveća i importiranih (DXF) objekata. Vlastite kreacije mogu se spremati u te iste arhive.

Edit — paleta za obradu i manipulaciju objekata dodjeljivanjem struktura (2D i 3D) te svojstava kao pozitiv, negativ i intersect. Tu su i alati za dimenzioniranje, zakretanje i pomicanje. Editor za teren, s pomoću raznih filtara i slika za reljef, omogućuje izradu uvjerljivih, prirodni sličnih terena.

Sky&Fog — paleta s pomoću koje dodajemo ono što nazivamo atmosferom. Manipuliranje oblacima, izmaglicom, maglom i sjenama prava je igrarija. Isto tako položaj sunca ili mjeseca. Gotove kombinacije spremamo na samoj paleti za kasniju upotrebu u raznim scenama.

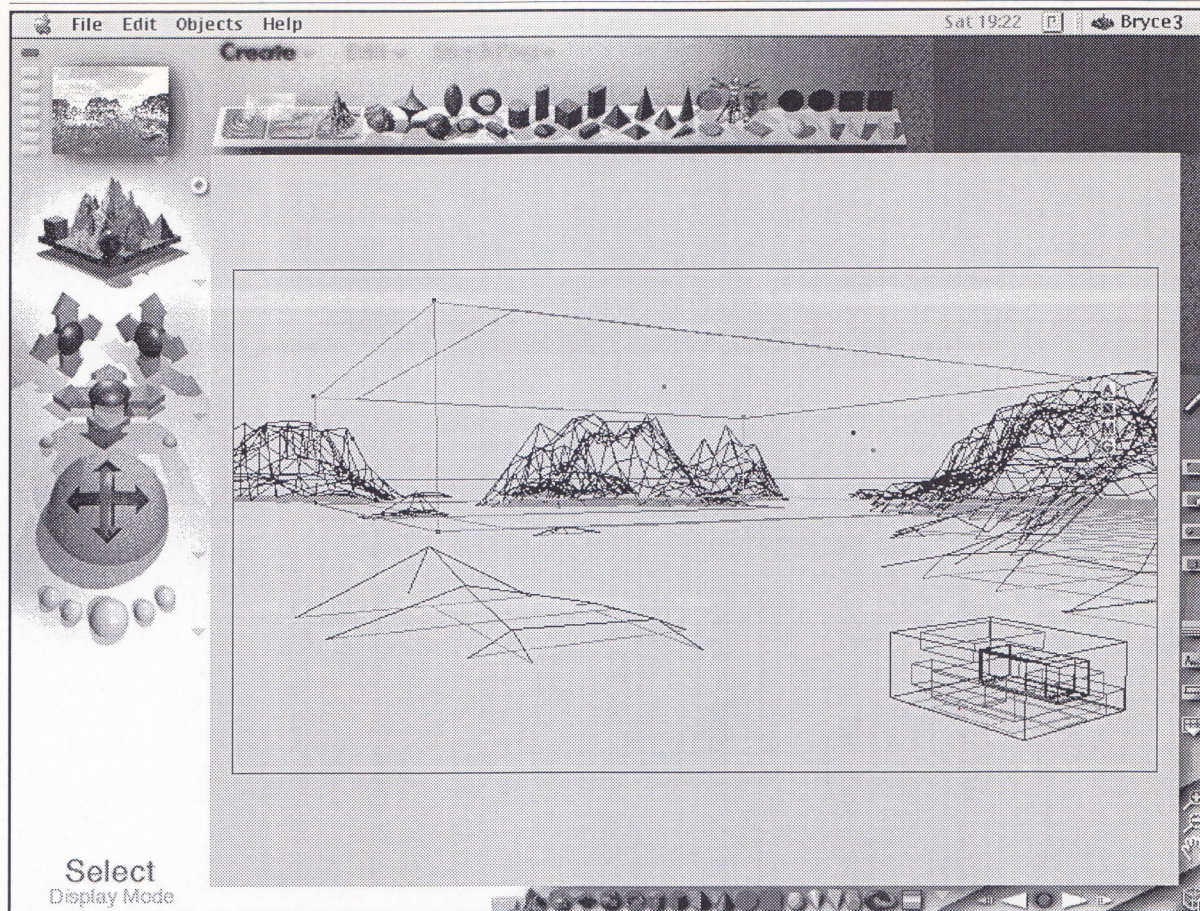
Radni stol osim promjenjivih paleta ima mali prikaz scene, manipulatora za kameru, tipkala za selekciju objekata i iscrtavanje scene.

Iscrtavanje ili renderiranje konačne slike pomalo je sporo, no rezultat je više nego uvjerljiv. Za cijenu od oko 300 US dolara nema ni približno dobrog programa. Takmaci se pojavljuju tek dobrano iznad tisuću dolara i namijenjeni su samo profesionalcima.

BRYCE je nazvan po nacionalnom parku u državi Utah. Zaravan erodirana u labirint klanaca, monolita i isprepletenih vododerina, u živo obojenom pješčaniku, tipičan je predložak za mogućnosti BRYCE-a.

Više nikada neću biti siguran gledam li film snimljen na stvarnim lokacijama ili je sve nastalo iz digitalnog krajolika u nekom brzom računalu.

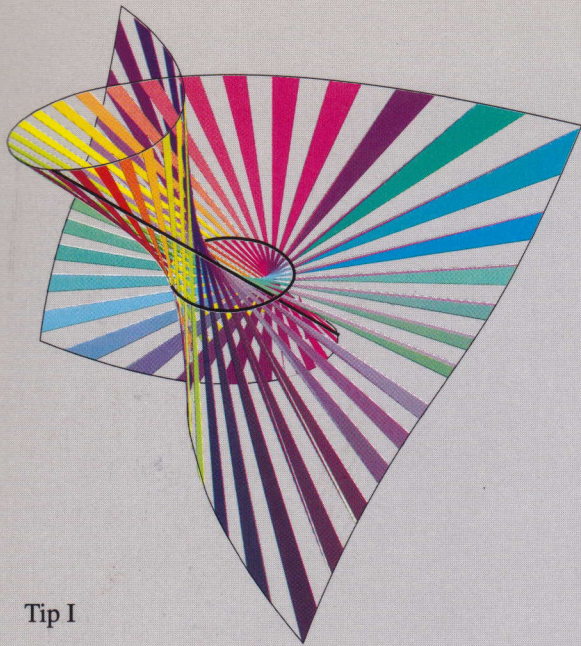
Vjekoslav Fabić — Holi



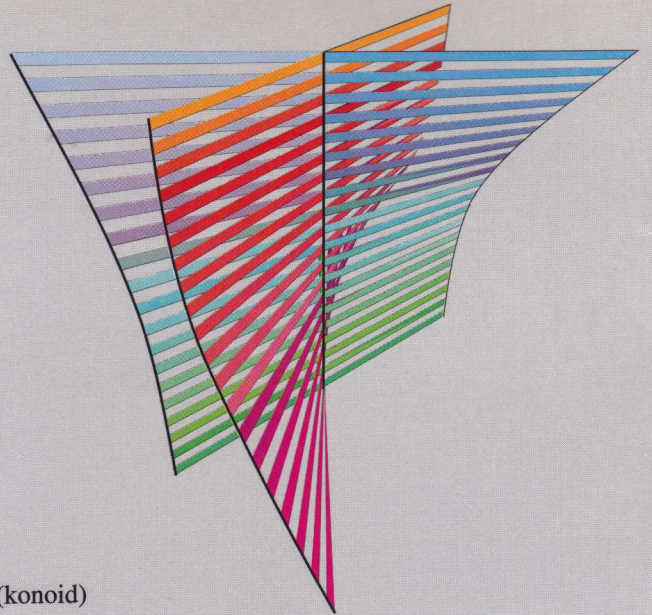
Radno sučelje s prizorom koji se gradi

Iscrtani dovršeni krajolik

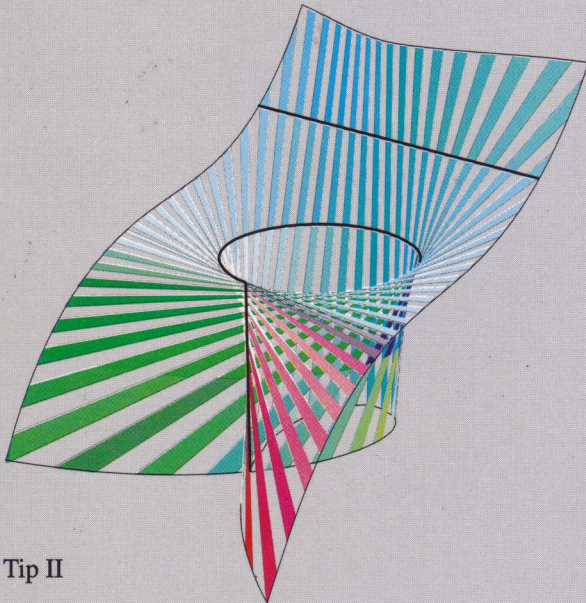




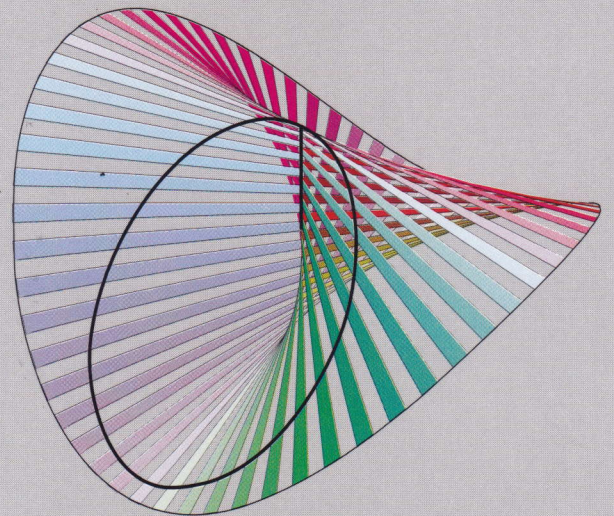
Tip I



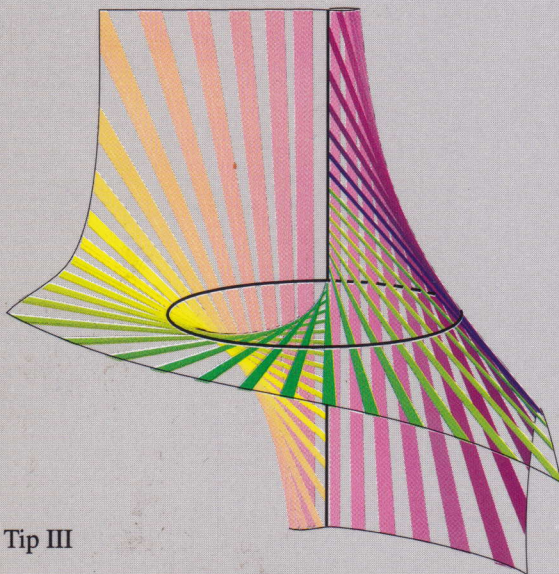
Tip I (konoid)



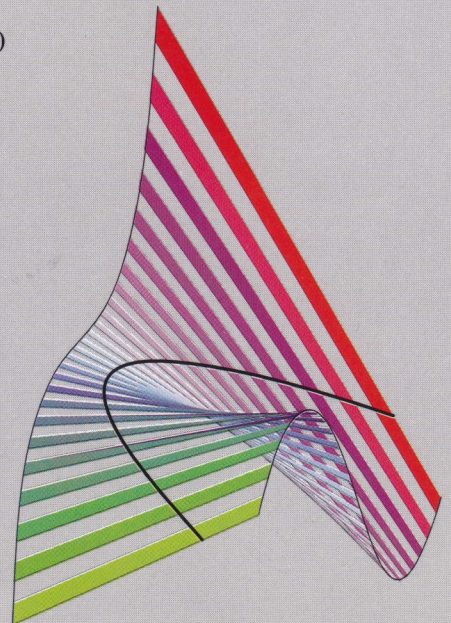
Tip II



Tip II (konoid)



Tip III



Tip III (konoid)

