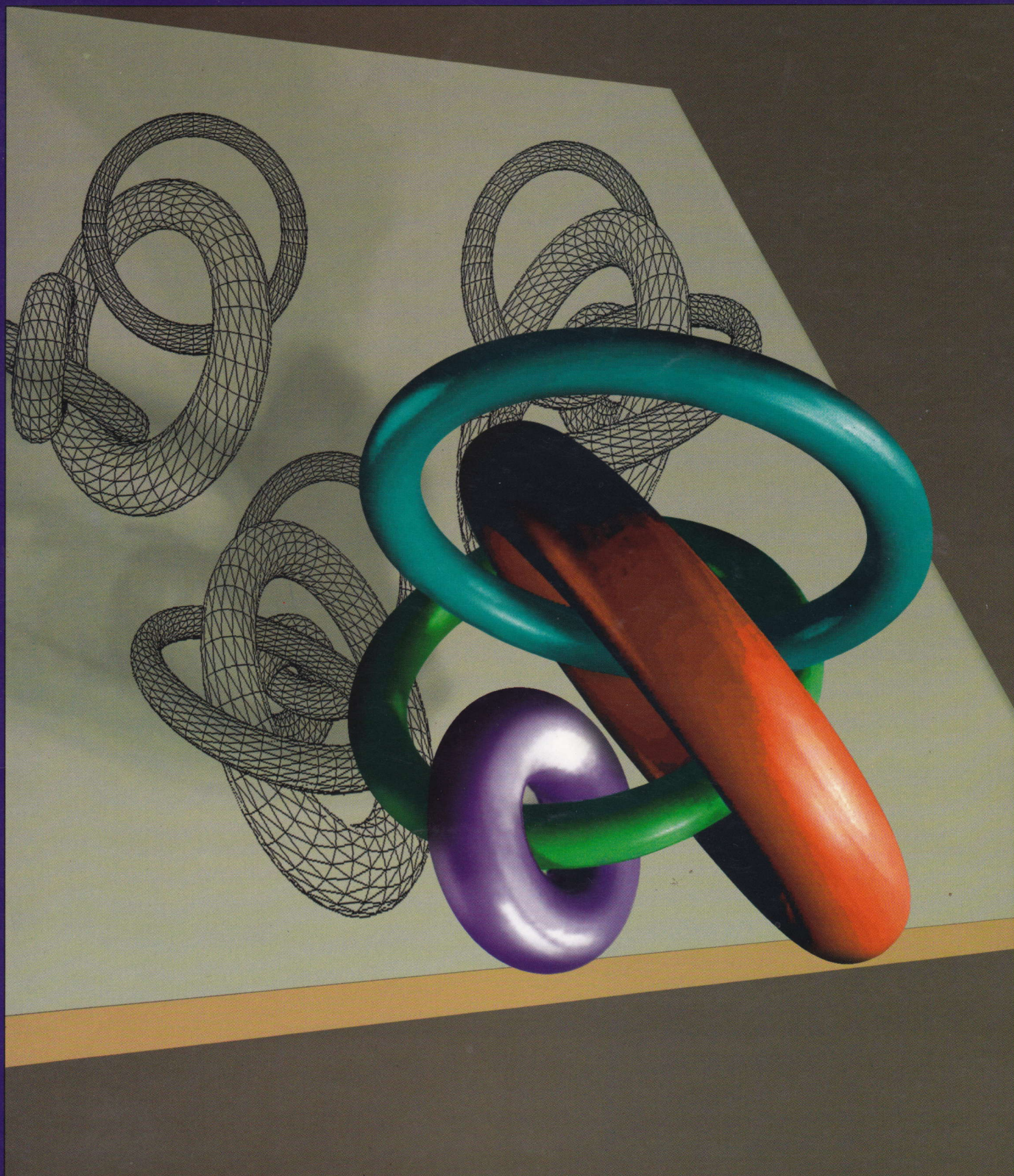


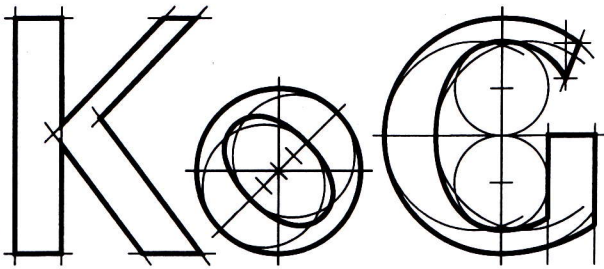
ISSN 1331-1611

BROJ 1
ZAGREB, 1996
CIJENA 35 KN

KoG

ZNANSTVENO-STRUČNO-INFORMATIVNI ČASOPIS
HRVATSKOG DRUŠTVA ZA KONSTRUKTIVNU GEOMETRIJU I KOMPJUTORSKU GRAFIKU





ZNANSTVENO-STRUČNO-INFORMATIVNI ČASOPIS
HRVATSKOG DRUŠTVA ZA KONSTRUKTIVNU GEOMETRIJU I KOMPJUTORSKU GRAFIKU

SADRŽAJ

UVODNIK

V. Ščurić: Osnivanje Društva i poziv na suradnju 2

IZVORNI ZNANSTVENI RADOVI

V. Szivovicza: Nožišne krivulje konika u izotropnoj ravnini 3

A. Sliječević: Fokalna krivulja četverostrukih fokusa u pramenu cirkularnih krivulja trećega reda 6

S. Gorjanc: Konstruktivna obrada nožišnih ploha jedne (1,2) kongruencije 9

STRUČNI RADOVI

G. Nagy-Führer: Crtanje jajolikih krivulja 16

M. Lapaine: Grafički prikaz konika pomoću računala 19

J. Dvornik: Generiranje glatkih funkcija na složenom području pomoću R-funkcija 27

L. Pletenac: Novi aspekti nastave u nacrtnoj i primijenjenoj geometriji 31

GEOMETRIJA I GRAFIKA

B. Kučinić: 200 godina sustavnog grafičkog komuniciranja 35

Z. Veršić: Programi CAAD (Computer Aided Architectural Design) 38

S. Gorjanc: Detalj primjene Mathematice u konstruktivnoj geometriji 43

M. Ambruš-Kiš: Treća dimenzija za mase 47

VIJESTI, IZVJEŠĆA, PRIKAZI 51

UPUTE SURADNICIMA

“KoG” je časopis koji objavljuje znanstvene i stručne radove te ostale priloge iz područja konstruktivne geometrije i kompjutorske grafike

ZNANSTVENI I STRUČNI ČLANCI

- 1. Izvorni znanstveni rad** sadrži neobjavljene rezultate izvornih znanstvenih istraživanja, a znanstvene informacije su izložene tako da se točnost analiza i izvoda, na kojima se rezultati temelje, može provjeriti.
- 2. Prethodno priopćenje** je znanstveni rad koji sadrži jedan ili više novih znanstvenih podataka čija priroda zahtijeva hitno objavljivanje. Ne mora nužno imati dovoljno pojedinosti za ponavljanje i provjeru rezultata.
- 3. Pregledni rad** je znanstveni rad koji sadrži izvoran, sažet i kritički prikaz jednog područja ili njegovog dijela, u kojemu autor aktivno djeluje. Mora biti istaknuta uloga autorova izvornog doprinosa u tom području u odnosu na već publicirane radove, kao i pregled tih radova.
- 4. Stručni rad** sadrži korisne priloge iz područja struke koji nisu vezani za izvorna istraživanja autora, a iznesena zapažanja ne moraju predstavljati novost u struci.

Rad, duljine do 30.000 znakova, mora biti neobjavljen i ne smije istodobno biti nuđen drugom časopisu. Autor za svoj rad predlaže kategoriju, a konačnu odluku o svrstavanju donosi Izdavački savjet na temelju zaključaka recenzenata.

Rad može biti pisan na hrvatskom, engleskom ili njemačkom jeziku. Autor predaje tekst na jeziku kojega odabere, te sažetak na hrvatskom i engleskom. Sažetak opsegom ne bi trebao biti veći od 600 znakova. Naslov članka mora biti koncizan i informativan. Citiranu literaturu treba poredati po abecednom redu prezimena autora. Radovi iz časopisa citiraju se: redni broj, prezime i inicijal imena autora ili grupe autora, naslov rada, naziv časopisa, volumen, godina u zagradi, broj časopisa u godini, broj početne i završne stranice rada. Knjige se citiraju: redni broj, prezime i inicijal imena autora ili grupe autora, naslov knjige, nakladnik, mjesto izdanja, godina.

Članci trebaju biti dopunjeni kontaktnim podacima o autoru: ime i prezime, stručno zvanje, znanstveni stupanj, naziv poduzeća ili ustanove u kojoj radi, adresa ustanove i kuće, brojevi telefona i telefaksa, e-mail adresa, broj žiro-računa.

O prihvatanju ili odbijanju rada autor će biti obaviješten.

OSTALI PRILOZI

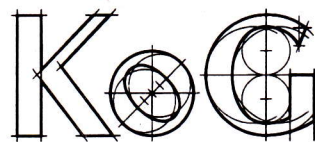
To su stručni osvrti i prikazi raznih sadržaja iz širokog područja geometrije i grafike, vijesti i izvješća o znanstveno-stručnim skupovima, prikazi knjiga, časopisa, studentskih radova, softvera i hardvera koji se objavljuju u rubrikama “Geometrija i grafika” i “Vijesti, izvješća, prikazi”.

Rukopisi i svi prilozi predaju se uredništvu. Za znanstvene i stručne radove potrebna su tri ispisa, a za ostale samo jedan.

Prihvaćene radove autori dostavljaju na disketi (DOS, MacOS) u MS Wordu ili WordPerfectu, a tekstovi bez formula ili posebnih grafičkih dodataka mogu biti i u .RTF ili ASCII formatu.

Ilustracijski prilozi mogu biti u formatu .EPS, .AI, .TIF (300 dpi), .PCX, .BMP, .JPG (samo polutonske slike) i u formatu Adobe Illustrator ili Macromedia FreeHand. Crteži tušem, na formatu do A3, na hameru.

Diskete vraćamo na zahtjev autora.



ISSN 1331-1611

Znanstveno-stručno-informativni časopis
Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i
kompjutorsku grafiku

*Scientific and Professional Information Journal
of the Croatian Society for Constructive
Geometry and Computer Graphics*

Osnivač i izdavač

Founder and Publisher

Hrvatsko društvo za konstruktivnu
geometriju i kompjutorsku grafiku

Izdavački savjet

Board of Trustees

Miroslav Ambruš-Kiš, mr. sc. Sonja Gorjanc,
Ćiril Koludrović, prof., mr. sc. Miljenko
Lapaine, mr. sc. Vlasta Szirovicza

Urednica

Editor

mr. sc. Sonja Gorjanc

Oblikovanje i grafička priprema

Design and Layout

Miroslav Ambruš-Kiš

Lektori

Linguistic Advisers

Mirna Bojanić-Rebac, prof.
Mario Rebac, prof.

Ilustracija na naslovnoj stranici

Cover Page Illustration

(HW/SW: Power Macintosh, MacroModel 1.5,
Photoshop 3)

Vjekoslav Fabić-Holi

Adresa uredništva

Editorial Address

10000 Zagreb, Avenija V. Holjeva 15, Hrvatska

telefon: +385 (0)1 670-509

telefaks: +385 (0)1 45-61-206

Tisak

Print

“O-tisak” d.o.o., Zagreb

Naklada

Circulation

250 primjeraka

Časopis izlazi jednom godišnje
Published annually

ISSN 1331-1611



9 771331 161005

CONTENTS

EDITORIAL

- V. Ščurić: Foundation of the Society and the Invitation to Collaboration 2

ORIGINAL SCIENTIFIC PAPERS

- V. Szivovicza: Pedal Curves of Conics in Isotropic Plane 3
A. Slipečević: The Focal Curve of Fourfold Foci in the Pencil of 3th Order Circular Curves 6
S. Gorjanc: Constructive Elaboration of the Pedal Surfaces of the (1,2) Congruence 9

PROFESSIONAL PAPERS

- G. Nagy-Führer: Drawing of Bird-egg Forms 16
M. Lapaine: Computer-aided Graphical Representation of Conic Sections 19
J. Dvornik: Generating Smooth Functions on Compound Domain by R-functions 27
L. Pletenac: New aspects of Education in Descriptive Geometry 31

GEOMETRY AND GRAPHICS

- B. Kučinić: 200 Years of Systematic Graphic Communication 35
Z. Veršić: CAAD Programs (Computer Aided Architectural Design) 38
S. Gorjanc: Detail of the Application of Mathematica on Constructive Geometry 43
M. Ambruš-Kiš: The Third Dimension for the Masses 47

- NEWS, REPORTS, PRESENTATIONS 51

INHALT

LEITARTIKEL

- V. Ščurić: Begründung der Gesellschaft und die Einladung auf die Zusammenarbeit 2

WISSENSCHAFTLICHE ORIGINALBEITRÄGE

- V. Szivovicza: Die Fußpunktkurven der Kegelschnitte in der isotropen Ebene 3
A. Slipečević: Die Brennpunktkurven der vierfachen Brennpunkte in Büscheln zirkulärer Kurven dritter Ordnung ... 6
S. Gorjanc: Konstruktive Bearbeitung von Fußpunktflächen einer (1,2) Kongruenz 9

FACHARTIKEL

- G. Nagy-Führer: Zeichnen von eiförmigen Kurven 16
M. Lapaine: Graphische Darstellung der Kegelschnitte mit Hilfe von Computer 19
J. Dvornik: Generierung der glatten Funktionen auf dem komplexen Gebiet mit Hilfe von R-Funktionen ... 27
L. Pletenac: Neue Aspekte des Unterrichtes in der darstellenden und der angewandten Geometrie 31

GEOMETRIE UND GRAPHIK

- B. Kučinić: 200 Jahre der systematischen graphischen Kommunizierung 35
Z. Veršić: Programme CAAD (Computer Aided Architectural Design) 38
S. Gorjanc: Ein Detail der Anwendung von Mathematica in der konstruktiven Geometrie 43
M. Ambruš-Kiš: Dritte Dimension für Massen 47

- NACHRICHTEN, BERICHTEN, BESPRECHUNGEN 51

Osnivanje Društva i poziv na suradnju

Godinama je na tehničkim fakultetima u Hrvatskoj prisutan problem priliva mladih nastavnika za geometrijske predmete. Razloga za to ima više — od srednjoškolskih nastavnih planova i programa iz matematike, pri čijem je izvodenju geometrija, a pogotovo stereometrija u posljednjih dvadesetak godina predavana u vrlo skraćenom obliku, dok se nacrtna geometrija predavala uglavnom na srednjim stručnim školama, pa do izobrazbe potencijalnih nastavnika iz predmeta Nacrtna odnosno Konstruktivna geometrija na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematičkom odjelu.

Na te čimbenike nastavnici Nacrtna geometrije i drugih geometrijskih predmeta s tehničkih fakulteta nisu imali niti imaju ikakva utjecaja. Zakon im ne dopušta da iz redova studenata vlastitog fakulteta odgoje i školuju budućeg nastavnika za svoju struku. Za postupak izbora i reizbora onih koji održavaju nastavu iz geometrijskih predmeta (od asistenta do redovnog profesora) također je nadležan PMF, Matematički odjel. Suočeni s tim problemima, mi, nastavnici Nacrtna geometrije, tražili smo način kako da barem ublažimo posljedice takvog stanja. Domovinski je rat potisnuo i odgodio naša nastojanja za određeno vrijeme.

Svjetska je tehnologija u međuvremenu napredovala. Kompjutori su našli primjenu u svim djelatnostima. Relativno niska cijena hardvera i softvera stvorila je donedavna nezamislive mogućnosti grafičke komunikacije. No, tu je izvorište i novih problema. Kod neupućenih se stvara dojam da kompjutor može riješiti i grafički predočiti praktički svaki prostorni problem — drugim riječima, nacrtanu geometriju kao predmet treba ukinuti, odnosno svesti na samo simboličan broj sati. Upućeni znaju da je situacija bitno drukčija.

Kao ilustraciju navodim primjer koji mi je ispričao naš nekadašnji student, a danas diplomirani inženjer i uspješni poslovni čovjek u zemlji visokorazvijene tehnologije.

U nekom je rudniku trebalo spojiti dva hodnika na različitim nivoima, različitim priklonih kuteva uz, jasno, najnižu cijenu. Trebalo je, dakle, odrediti mjesto njihove najkraće udaljenosti. Iako su ti hodnici bili kompjutorski obrađeni sa svim potrebnim podacima, problem je izgledao nerješiv sve dok nisu pozvali našeg čovjeka koji je "nacrtnaški" riješio zadatak za nekoliko sekundi.

Isti inženjer navodi da su operateri vrlo vješti, imaju na raspolaganju odlične programe za obradu podataka, no nije rijetkost da nakon obavljenih računanja ne mogu adekvatno interpretirati brojne podatke. Nedostaje im ono što se uči u predmetu Nacrtna geometrija, a posebno, u njih se nije razvio "prostorni zor".

Kompjutorski programi, poput Mathematice, ali i drugi, daju mogućnost i nama, matematičarima-deskriptivcima da u radu sa studentima, pošto je metodama nacrtna geometrije protumačeno i savladano gradivo određenog sadržaja, obogatimo našu nastavu

većim brojem kompjutorski izrađenih primjera. Time se na brz i efikasan način postiže zornost, samo je rješavanje bliskije promatraču, a povećava se i zainteresiranost studenata za proučavanje i rješavanje prostornih problema. Spomenuti program daje znanstvenim istraživačima novu dimenziju i pruža nam mogućnost da ih obogatimo pomoću nove tehnologije. Posebno se to odnosi na kompjutorski grafički prikaz, često vrlo složenih rezultata.

Kompjutorska grafika ubrzanom tempom zauzima sve važniju ulogu u mnogim djelatnostima, od grafičkog dizajna u ravnini, do preciznih grafičkih predodžbi složenih trodimenzionalnih konstrukcija s primjenom u raznim granama tehnike. I uz najbolji kompjutor i posjedovanje svih potrebnih programa, prikaz tih složenih tvorevina moguć je jedino na principima koji se izučavaju u Nacrtnoj geometriji. Poznate su mi početne teškoće u radu i problemi onih koji su se, ne poznavajući prostorne zakonitosti i metode koje se uče u Nacrtnoj geometriji, pokušali baviti kompjutorskom 3D grafikom.

Iz izloženoga vidimo da klasična disciplina Nacrtna geometrija i Kompjutorska grafika imaju mnogo zajedničkih elemenata, odnosno da se te dvije discipline u tehničkoj primjeni nužno dopunjuju te je potrebno iznaći zajednički interes obiju struka.

Povezujući u cjelinu ovdje u najkraćim crtama navedene činjenice, odlučili smo, nas dvadesetak nastavnika na tehničkim fakultetima Republike Hrvatske, pokrenuti postupak za registraciju Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku.

Osnivačka skupština održana je 16. lipnja 1994. godine, a Društvo je 9. prosinca iste godine upisano u Registar udruženja građana Republike Hrvatske pod br. 1952 Knjiga II. Nakon toga obavljene su i ostale radnje nužne za pravno djelovanje Društva.

Iz Statuta Društva vidljivi su njegovi ciljevi te široke mogućnosti djelovanja. Svi koji se bave konstruktivnom geometrijom ili kompjutorskom grafikom mogli bi u radu Društva naći svoj interes, posebno stoga što imamo pravo na izdavačku djelatnost (časopisi, skripta, udžbenici) te održavanje seminara i tečajeva iz naše široke domene, a mogli bismo pomoći jedni drugima.

KoG je znanstveno-stručno-informativni časopis našega Društva. U rukama držite njegov prvi broj, koji je rezultat volonterskog rada i entuzijazma sadašnjeg članstva. Koristim priliku da izrazim zahvalnost recenzentima i svima koji su znanjem pridonijeli njegovu sadržaju. Planiramo da časopis izlazi jednom godišnje. Prihvaćamo sugestije i radove te pozivamo na različite oblike stručne suradnje sve koji se bave jednim od "dvostrukog KoG".

Dr. Vlasta Ščurić

Predsjednica Hrvatskog društva
za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku

Die Fußpunktkurven der Kegelschnitte in der isotropen Ebene

Pedal Curves of Conics in an Isotropic Plane

ABSTRACT

First we introduce the notion of pedal curves in isotropic plane I_2 . Then we give a classification of curves of order 4, which are pedals of conics given by their normal forms with respect to the group \mathcal{G}_5 of isotropic similarities. Finally, we give a relationship between the pedals and the quadratic inversion for these curves in isotropic plane.

Key Words

geometry, isotropic plane, pedal curves, quadratic inversion

Nožišne krivulje konika u izotropnoj ravnini

SAŽETAK

Za konike izotropne ravnine čije su jednadžbe dane u normalnom obliku s obzirom na grupu \mathcal{G}_5 izotropnih gibanja izvedene su jednadžbe nožišnih krivulja. Dokazano je da su to krivulje 4. reda, te je uspostavljena veza između njih i krivulja 4. reda dobivenih kvadratnom inverzijom.

Ključne riječi

geometrija, izotropna ravnina, nožišna krivulja, kvadratna inverzija

Eine isotrope Ebene ist eine reelle affine Ebene $A_2(\mathcal{R})$, die über eine Absolutfigur $\{f, F\}$ - bestehend aus einer Geraden f und einem mit f inzidenten Punkt F — metrisiert wird. Alle Transformationen der Gestalt

$$\begin{aligned} \underline{x} &= c_1 + c_2 x \\ y &= c_3 + c_4 x + c_5 y \end{aligned}$$

bilden die fünfparametrische allgemeine isotrope Ähnlichkeitsgruppe \mathcal{G}_5 der isotropen Ebene [6].

Bezüglich der allgemeinen isotropen Ähnlichkeitsgruppe \mathcal{G}_5 existieren in der isotropen Ebene sieben Typen von Kegelschnitten, die durch nachstehende Normalformen beschrieben werden können:

$$\text{Ellipse} \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

$$\text{Imaginäre Ellipse} \quad x^2 + y^2 = -1 \quad (2)$$

$$\text{Hyperbel 1. Art} \quad x^2 - y^2 = 1 \quad (3)$$

$$\text{Hyperbel 2. Art} \quad x^2 - y^2 = -1 \quad (4)$$

$$\text{Parabel} \quad y^2 = x \quad (5)$$

$$\text{Spezielle Hyperbel} \quad xy = 1 \quad (6)$$

$$\text{Isotroper Kreis} \quad y = x^2 \quad (7)$$

Ein isotroper Kreis ist ein Kegelschnitt, der im Punkt F die absolute Gerade f als Tangente besitzt.

BEMERKUNG. In der isotropen Ebene existieren drei Arten von Hyperbeln in Bezug auf die Lage des absoluten Punktes F zu den Schnittpunkten der Hyperbeln mit der absoluten Geraden. Sind die Tangenten, die von F an die Hyperbel gelegt werden können reell, so liefert dies eine Hyperbel 1. Art; sind diese Tangenten konjugiert-komplex, dann ist die Hyperbel 2. Art; fällt der Punkt F in einen der Schnittpunkte der Hyperbel mit der Geraden f , dann spricht man von einer speziellen Hyperbel. Der letzte Kegelschnitt ist ein isotropes Analogon zur gleichseitigen Hyperbel der euklidischen Ebene [8].

Für die weiteren Betrachtungen sind die folgenden Überlegungen wichtig:

1. Für einen beliebigen Kegelschnitt kann man die Gleichung seiner polaren Kurve in Bezug auf einen isotropen Kreis (7) bestimmen.

Nehmen wir eine Ellipse mit der Gleichung

$$k^*(x, y) \equiv x^2 + y^2 = 1 \quad (8)$$

Die Gleichung ihrer polaren Kurve bezüglich (7) wird auf folgende Weise bestimmt:

Die Determinante der algebraischen Komplementen der Kurve (7) sind die Koeffizienten der zu ihr adjungierten Kurve: $A_1 = -0.25$, $E_1 = 0.5$. Damit lautet ihre Gleichung in Geradenkoordinaten

$$c(u, v) \equiv u^2 - 4v = 0. \quad (9)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Pol und seiner Polaren bezüglich einer Kurve ist durch die Relation

$$x: y: 1 = (A_1 u + B_1 v + D_1) : (B_1 u + C_1 v + E_1) : (D_1 u + E_1 v + F_1)$$

gegeben. Im Fall des Kreises (7) lautet diese Formel

$$x = -\frac{u}{2v}, \quad y = \frac{1}{v}. \quad (10)$$

Setzt man (10) in (8) ein, so folgt

$$k(u, v) \equiv u^2 - 4v^2 + 4 = 0 \quad (11)$$

als Gleichung jenes Kegelschnittes, der polar zur Ellipse (8) bezüglich des isotropen Kreises (7) ist. Wir bemerken, daß dies eine Hyperbel 2. Art ist.

2. Nun sei in der isotropen Ebene I_2 ein isotroper Kreis durch die Gleichung $x^2 - y = 0$ gegeben. Ist eine Gerade $y = kx + l$ Tangente dieses Kreises, so muß in der Schnittbedingung

$$x_{1,2} = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} + l} \quad (12)$$

die Diskriminante verschwinden. Dies liefert einerseits die Berührbedingung

$$k^2 = -4l \quad (13)$$

und andererseits die Koordinate $x_0 = 0.5k$ für den Berührungspunkt $L(x_0, y_0)$. Weiter findet man mittels (13) und der Kreisgleichung $0.25k^2 - y = 0$, also $4y = k^2 = -4l$, woraus $y_0 = -l$ folgt.

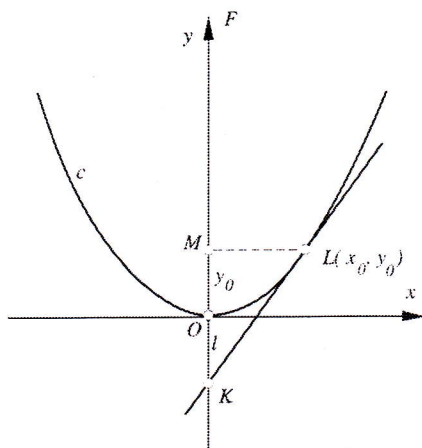


Fig. 1.

Der Berührungspunkt L in Fig.1 besitzt somit die Koordinaten $L(0.5k, -l)$. Für den Schnittpunkt K stellt sich $K(0, l)$ ein.

3. In der euklidischen Ebene ist die Fußpunktkurve eines beliebigen Kegelschnittes bezüglich eines Pols die Menge der Fußpunkte der Normalen, die durch den Pol auf die Tangenten dieses Kegelschnittes gelegt werden können.

In der isotropen Ebene enthalten alle isotropen Normalen die auf die Tangenten eines Kegelschnittes gelegt werden, den absoluten Punkt F , d.h. alle Fußpunktkurven sind zu isotropen Geraden ausgeartet.

Wir schlagen deshalb einen anderen Weg ein um den Begriff der Fußpunktkurve in die isotrope Ebene zu übertragen. Die Kurve 2. Klasse (11) besitzt in Punktkoordinaten die Gleichung

$$k(x, y) \equiv 4x^2 - y^2 + 1 = 0 \quad (14)$$

Die Gleichung eines parallelen Tangentenpaares der Kurve (14) lautet nach [1]

$$y = kx \pm \sqrt{-\frac{k^2}{4} + 1}. \quad (15)$$

Um für eine beliebige Tangente (15) des Kegelschnittes (14) eindeutig eine isotrope Ersatz-Normale zu definie-

ren, bestimmt man zu dieser Tangente die parallele Tangente des isotropen Kreises (7). Die Gleichung dieser Tangente hat wegen (13) die Form

$$y = kx - \frac{k^2}{4}. \quad (16)$$

Durch ihren Berührungspunkt $L(0.5k, -l)$ legen wir die isotrope Normale, die dann die Gleichung

$$x = \frac{k}{2} \quad (17)$$

besitzt.

Den Schnittpunkt der Geraden (15) und (17) definieren wir als Normalenfußpunkt. Da die beiden Gleichungen von einem Parameter k abhängig sind, legt die Schnittpunktmenge die gesuchte **Fußpunktkurve des Kegelschnittes** (14) in der isotropen Ebene fest. Man findet ihre Normalform zu

$$k_N \equiv 4x^4 + x^2 + y^2 - 4x^2y - 1 = 0. \quad (18)$$

Da die angegebene Erzeugung der Fußpunktkurve von der Wahl des Kreises (7) abhängt, werden wir diesen Kreis als **Grundkreis der Fußpunkterzeugung** bezeichnen. Daraus folgt der

Satz 1

Die Fußpunktkurve einer Ellipse (11) bezüglich des Grundkreises der Fußpunkterzeugung ist eine algebraische Kurve 4. Ordnung (18).

Diese Kurve k_N ist in Fig. 2. die Fußpunktkurve des Kegelschnittes k bezüglich des Grundkreises c .

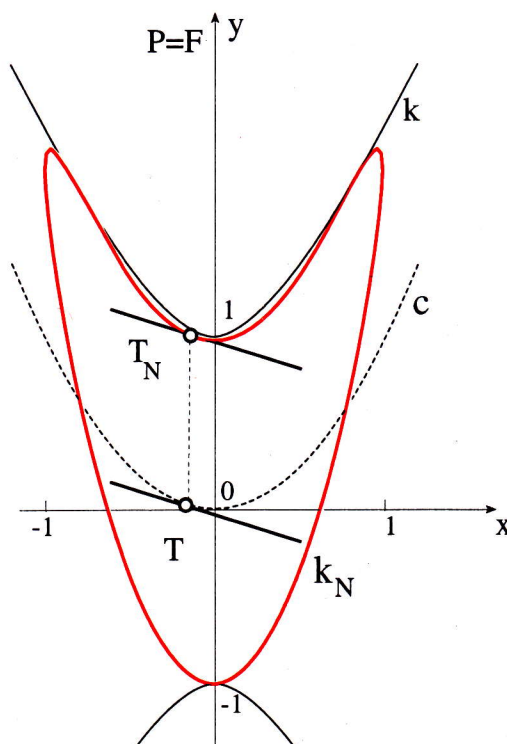


Fig. 2.

Auf dieselbe Weise bestimmt man die Gleichung der Fußpunktkurve jeder der Kegelschnitte (1) - (6), was in der folgenden Übersicht zusammengestellt ist:

k^*	k	k_N	
Ellipse $x^2 + y^2 - 1 = 0$	Hyperbel 2.Art $4x^2 - y^2 + 1 = 0$	$4x^4 + x^2 + y^2 - 4x^2y - 1 = 0$	(19)
Imaginäre Ellipse $x^2 + y^2 + 1 = 0$	Hyperbel 1.Art $4x^2 + y^2 + 1 = 0$	$4x^4 + x^2 + y^2 - 4x^2y + 1 = 0$	(20)
Hyperbel 1.Art $x^2 - y^2 - 1 = 0$	Hyperbel 1.Art $4x^2 - y^2 - 1 = 0$	$4x^4 - x^2 + y^2 - 4x^2y + 1 = 0$	(21)
Hyperbel 2.Art $x^2 - y^2 + 1 = 0$	Ellipse $4x^2 + y^2 - 1 = 0$	$4x^4 - x^2 + y^2 - 4x^2y - 1 = 0$	(22)
Parabel $y^2 = x$	Spezielle Hyperbel $8xy + 1 = 0$	$4x^4 + y^2 - 4x^2y + x = 0$	(23)

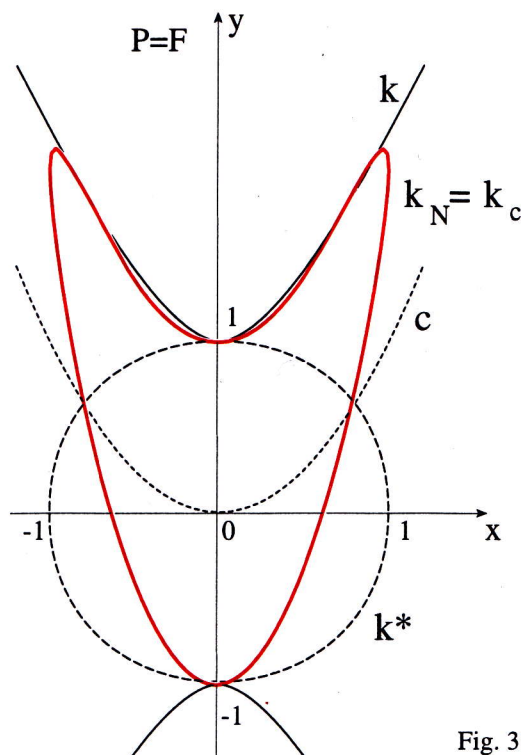


Fig. 3.

4. Die Gleichung der quadratischen Inversion in der isotropen Ebene bezüglich eines isotropen Kreises lautet nach [4]

$$\frac{x}{y} = x$$

$$y = 2x^2 - y. \tag{24}$$

Die inverse Kurve k_c zu (8) gewinnt man mittels (24) zu

$$k_c \equiv 4x^4 + x^2 + y^2 - 4x^2y - 1 = 0 \tag{25}$$

Offensichtlich ist (25) mit der Gleichung (18) identisch. Dasselbe Verfahren kann auch für die anderen Kegelschnitte durchgeführt werden. Als Hauptresultat ergibt sich der folgende Satz, der aus der euklidischen, aber auch aus der hyperbolischen Ebene ([9] und [7]) bekannt ist:

Satz 2

Die Fußpunktkurve k_N eines beliebigen Kegelschnittes k in der isotropen Ebene bezüglich des absoluten Punktes F als Pol und des Grundkreises c der Fußpunktserzeugung ist jener Kurve k_c identisch, die mittels der quadratischen Inversion eines Kegelschnittes k^* bezüglich desselben Pols und desselben Inversiongrundkreises c erzeugbar ist. Dabei sind die Kegelschnitte k und k^* polar in Bezug auf den Kreis c ; die Kurve k_c ist das inverse Bild von k^* und k_N ist die Fußpunktkurve von k (Fig. 3).

Diesen Zusammenhang könnte man auf Kurven höherer Ordnung verallgemeinern, wie dies aus der euklidischen Ebene bekannt ist.

LITERATUR

[1] CESAREC, R.: *Analitička geometrija I*, Zagreb, 1957,
 [2] FLADT, K.: *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven*, Frankfurt/Main, 1962,
 [3] МАКАРОВА, Н. М.: Кривые второго порядка в плоской параболической геометрии »Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии«, Ученые записки МГПИ им. Ленина (1963), 222-251.
 [4] PALMAN, D.: Über zirkuläre Kurven 3. Ordnung der isotropen Ebene, Rad JAZU 444(1989), 37-46,
 [5] PALMAN, D.: Vollständig zirkuläre Kurven 4. Ordnung der isotropen Ebene, Rad HAZU [456] 10 (1991), 15-32,
 [6] SACHS, H.: *Ebene isotrope Geometrie*, Braunschweig-Wiesbaden, 1987,
 [7] SZIROVICZA, V.: Vollkommen zirkuläre Fusspunktkurven der hyperbolischen Ebene, Rad JAZU [408] 3 (1984), 17-25,
 [8] ŠČURIĆ-ČUDOVAN, V.: Ein Kennzeichnung der speziellen Hyperbel der isotropen Ebene, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien [201] (1992), 111-115,
 [9] WIELEITNER, H.: *Spezielle ebene Kurven*, Leipzig, 1908.

Mr. sc. Vlasta Szivovicza

Gradevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
 10000 Zagreb, Kačićeva 26,
 tel.: 418-897
 fax: 45-61-206
 e-mail: szvlasta@master.grad.hr

* Die Abbildungen wurden mittels einem PC486 und dem Programm Autodesk AutoCAD for MS Windows Release 12 und Wolfram Research Mathematica for Windows Release 2.2 gezeichnet.

Die Brennpunktskurven der vierfachen Brennpunkte in Büscheln zirkulärer Kurven dritter Ordnung

The Focal Curve of Fourfold Foci in the Pencil of 3rd Order Circular Curves

ABSTRACT

In this paper it is proved that the curve of fourfold foci in the pencil of circular and rational cubics, which is deduced by ordinary inversion, is a circle, and its construction is shown. An analogous foci circle f is constructed in one pencil (k_i^3) of circular cubics of 1st genus. It is shown that by means of this circle focus of any cubics belonging to (k_i^3) can be obtained.

Key Words

circular curve, fourfold focus, focal curve

Fokalna krivulja četverostrukih fokusa u pramenu cirkularnih krivulja trećega reda

SAŽETAK

Dokazuje se da je žarišna krivulja četverostrukih fokusa f u pramenu cirkularnih racionalnih krivulja 3. reda, izvedenom običnom kvadratnom inverzijom, kružnica, te se ona i konstruira. Analogna se žarišna kružnica f konstruira i u jednom pramenu (k_i^3) cirkularnih krivulja 3. reda prvoga. Pokazuje se kako se pomoću ove žarišne kružnice određuje žarište bilo koje kubike iz takvog pramena (k_i^3).

Ključne riječi

cirkularna krivulja, četverostruki fokus, fokalna krivulja

Der vierfache Brennpunkt einer zirkulären ebenen Kurve ist, wie bekannt, der Schnittpunkt ihrer isotropen Tangenten. Das Problem der Konstruktion eines solchen Punktes ist für einzelne Kurven dritter und vierter Ordnung vom Geschlecht Null schon gelöst [1]. Es ist aber nicht bekannt, wie man den vierfachen Brennpunkt einer allgemeinen zirkulären Kurve konstruieren kann. Um ein solches Problem zu lösen, ist es nützlich, die Kurvenbüschel wie auch ihre Brennpunktskurven zu betrachten.

Die Brennpunktskurve im Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung vom Geschlecht Null ist ein Kreis. Dieser Brennpunktskreis wurde konstruiert in den Fällen, wenn das Büschel durch verallgemeinerte Quadratinversion erzeugt wird [4] und wenn ein solches Büschel als das Büschel der Fußpunktskurven der Parabeln eines Parabelbüschels erzeugt wird [5].

Da ein Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung mit-

tels gewöhnlicher Quadratinversion aus einem Kegelschnittbüschel ausführbar ist, soll folgendes Theorem beweisen.

Theorem 1.

Die Brennpunktskurve in einem mittels gewöhnlicher Quadratinversion erzeugten Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung ist ein Kreis.

Beweis. Es sei eine gewöhnliche Quadratinversion $i: P^2 \rightarrow P^2$ mit dem Grundkreis c und dem Pol im Mittelpunkt D des Kreises c gegeben. Sei ein Kegelschnittbüschel (k_i^2) mit vier Grundpunkten A, B, C und D gegeben, wobei beliebige drei von vier Punkten nicht kollinear sind (Abb.1).

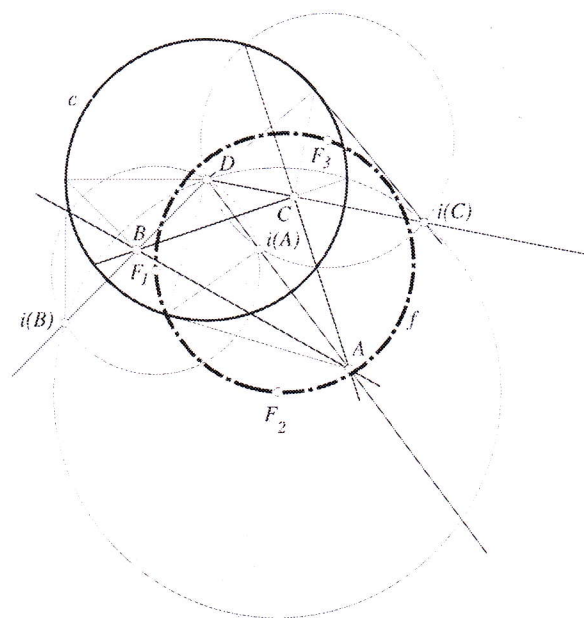


Abb.1.

Mittels Quadratinversion i in Bezug auf den Kreis c und den Pol D bildet sich dieses Kegelschnittbüschel in das Büschel (k_i^3) zirkulärer Kurven dritter Ordnung vom Geschlecht Null ab. Die Grundpunkte des Büschels (k_i^3) sind: $i(A), i(B), i(C)$ der Doppelpunkt D , wie auch die absoluten Punkte der Ebene. Jede der Kurven dritter Ordnung des Büschels (k_i^3) besitzt zwei isotrope Tangenten, die sich in ihrem vierfachen Brennpunkt schneiden. Um das Theorem zu beweisen, soll man folgende Lemmas nutzen.

Lemma 1. Ordnen wir in einem mit vier Grundpunkten

gegebenen Kegelschnittbüschel der Tangente eines Kegelschnittes in einem Grundpunkt die Tangente desselben Kegelschnittes in einem anderen Grundpunkt zu, so sind die entstehende Tangentenbüscheln projektiv zugeordnet [2].

Lemma 2. Die gewöhnliche Quadratinversion ist eine Konformabbildung [3].

Aus der Lemmen geht hervor, daß durch zwei beliebige Grundpunkte gelegten Tangenten der zirkulären Kurven dritter Ordnung eines solchen Kurvenbüschels projektiv zugeordnete Geradenbüschel bilden. Wie bekannt, ist das Erzeugnis der projektiv zugeordneten Geradenbüschel ein durch die Grundpunkte der Tangentenbüschel verlaufender Kegelschnitt [1].

Nehmen wir die absoluten Punkte als Grundpunkte der Tangentenbüschel, so wird ihr Erzeugnis ein Kreis f . Dieser Kreis ist die gesuchte Brennpunktskurve im gegebenen Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung.

Zur Konstruktion des Brennpunktskreises bemerken wir, daß es im gegebenen Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung drei entartete Kurven gibt. Es sind jene Kurven, die als Quadratinversionsbilder der drei entarteten Kegelschnitte des Kegelschnittbüschels entstehen. Die entarteten Kegelschnitte sind die Geradenpaare $AB, CD; BC, DA;$ und AC, BD , wobei sich jedes Paar in einen Kreis und eine Gerade abbildet. Die drei Mittelpunkte F_1, F_2 und F_3 dieser Kreise bestimmen den gesuchten Brennpunktskreis f (Abb.1).

Das Theorem 1. ermöglicht die Konstruktion des vierfachen Brennpunkts jeder beliebigen zirkulären Kurve dritter Ordnung k^3 vom Geschlecht Null, im Fall dass diese Kurve durch vier auf einer Geraden nichtliegender einfacher Punkte M, N, P und Q , und einen Doppelpunkt D gegeben ist. Man soll nur einen beliebigen Kreis c mit dem Mittelpunkt im Doppelpunkt D als einen Grundkreis einer gewöhnlichen Quadratinversion auswählen, und die obige Kurve dritter Ordnung als die Kurve der zwei Kurvenbüschel (k_i^3) und (l_i^3) betrachten. Seien die Büschel (k_i^3) und (l_i^3) , zum Beispiel mit Grundpunkten M, N, P , bzw. M, N, Q und mit dem Doppelpunkt D gegeben. Die vier Punkte $i(M), i(N), i(P)$ und D , bzw. $i(M), i(N), i(Q)$ und D sind dann die Grundpunkte der zwei Kegelschnittbüschel (k_i^2) und (l_i^2) . Mittels Quadratinversion dieser Büschel entstehen die Büschel (k_i^3) und (l_i^3) .

Die zwei Brennpunktskreise f_1 und f_2 der Büschel (k_i^3) und (l_i^3) schneiden sich in zwei reellen Punkten. Einer von zwei Schnittpunkten ist der vierfache Brennpunkt der gegebenen Kurve k^3 . Der andere Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des gemeinsamen Kreises einer entarteten Kurve im Büschel (k_i^3) und einer im Büschel (l_i^3) .

Man beachte, dass jetzt die Möglichkeit besteht, eine Konstruktion des vierfachen Brennpunktes aller möglicher zirkulären Kurven dritter Ordnung vom Geschlecht Null zu machen. Es bleibt noch die Frage, diese Konstruktion für die allgemeine zirkuläre Kurve dritter Ordnung durchzuführen. Um ein solches Problem zu lösen,

sollte man zuerst die Brennpunktskurve im Büschel allgemeiner zirkulärer Kurven dritter Ordnung konstruktiv bestimmen.

Da ein allgemeines Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung die absoluten Punkte als Grundpunkte besitzt, ist es nicht schwer zu schließen, daß auch im solchen Büschel die Brennpunktskurve ein Kreis ist.

Man wird jetzt den Brennpunktskreis in einem speziellen Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung vom Geschlecht Eins konstruieren.

Gegeben sei ein solches Büschel durch zwei entartete zirkuläre Kurven dritter Ordnung k_1^3 und k_2^3 . Die Kurve k_1^3 wird in den Kreis k_a und die Gerade a , und die Kurve k_2^3 in den Kreis k_b und die Gerade b zerfällt (Abb.2). Die Schnittpunkte A, B, C, D, E, F und G der Kurven k_1^3 und k_2^3 sind die Grundpunkte eines Büschels zirkulärer Kurven dritter Ordnung, die im allgemeinen ohne Doppelpunkt sind. Die Kurven k_1^3 und k_2^3 haben wir so ausgewählt, daß die Punkte A, B, C, D, E und F die Eckpunkte eines Vierecks a, b, c, d sind. Der Punkt G ist deswegen der Brennpunkt derjenigen Parabel, welche die Geraden a, b, c, d als Berührungsgereaden besitzt [5]. Die Kreise k_a und k_b sind die Brennpunktskreise der zweiten, mit den Grundtangente b, c, d , bzw. a, c, d bestimmten, Parabelscharen [5].

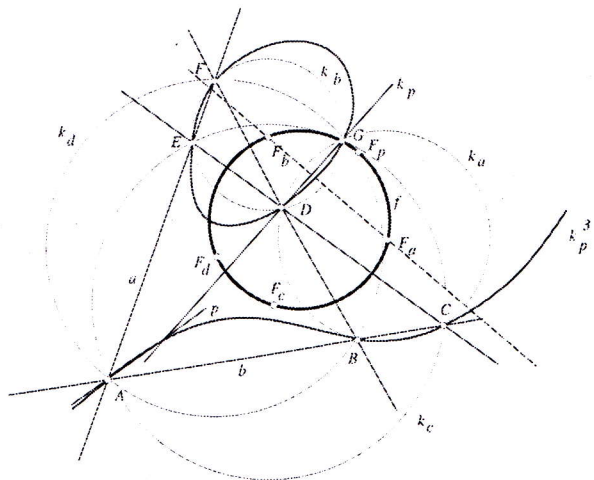


Abb. 2.

Betrachten wir jetzt ein Kreisbüschel (k_i^2) mit den Grundpunkten D und G , sowie ein Geradenbüschel (A) mit dem Grundpunkt A . Ordnen wir dem Kreis $k_a \in (k_i^2)$ die Gerade $b \in (A)$, dem Kreis $k_b \in (k_i^2)$ die Gerade $a \in (A)$, sowie dem entarteten Kreis k_p eine beliebige Gerade $p \in (A)$, zu. Damit wird eine Projektivität zwischen den Büscheln (k_i^2) und (A) gegeben (Abb. 2). Das Erzeugnis dieser projektiv zugeordneten Büschel ist bekanntlich eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung, die durch die Punkte A, B, C, D, E, F und G verläuft.

Jeder Gerade $p_i \in (A)$ wird auf dieser Weise eine durch die Punkte A, B, C, D, E, F, G bestimmte Kurve k_i^3 dritter Ordnung zugeordnet. Im allgemeinen, haben alle solchen Kurven keinen Doppelpunkt. Der unendlich ferne Punkt für jede Kurve ist $P_i^\infty \in p_i$. Eine solche ist

auch die Kurve k_p^3 , deren Asimptote mit der Gerade p parallel ist (Abb. 2).

Wir möchten den vierfachen Brennpunkt der Kurve k_p^3 konstruieren. Dieser Brennpunkt wird auf dem Brennpunktkreis des Büschels (k_i^3) liegen und deswegen müssen wir zuerst den Brennpunktkreis bestimmen.

Man soll bemerken, daß sich im Büschel (k_i^3) außer den Kurven (k_1^3) und (k_2^3) noch zwei entartete Kurven (k_3^3) und (k_4^3) finden. Die Kurve (k_3^3) besteht aus dem durch die Punkte A, B, F, G bestimmten Kreis k_c und der Gerade c , und (k_4^3) aus dem durch die Punkte A, C, E, G bestimmten Kreis k_d und der Gerade d . Die Mittelpunkte F_a, F_b, F_c und F_d der Kreise k_a, k_b, k_c und k_d bestimmen den gesuchten Brennpunktkreis f (Abb. 2).

Es ist möglich, für jede zirkuläre Kurve dritter Ordnung des Büschels (k_i^3) ihren vierfachen Brennpunkt zu konstruieren. Da eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung einen einzigen unendlich fernen Punkt wie auch einen einzigen vierfachen Brennpunkt besitzt, ist es möglich, eine Projektivität zwischen unendlich ferner Punktreihe (g^∞) und der Reihe der vierfachen Brennpunkte auf dem Kreis f in Bezug auf das Büschel (k_i^3) herzustellen. Mittels dieser Projektivität wurde der vierfache Brennpunkt F_p der Kurve (k_p^3) konstruiert. Damit ist das Problem der Konstruktion des vierfachen Brennpunktes für alle möglichen zirkulären Kurven dritter Ordnung gelöst.

LITERATUR

- [1] NIČE, V.: Konstrukcija četverostrukog fokusa cirkularnih krivulja 3. reda i nekih 4. reda roda nultoga, *Nast. Vjesnik (Zagreb)* 51 (1943), 271-280;
- [2] PALMAN, D.: *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984;
- [3] SAVELOV, A. A.: *Ploskie krivie*, Gasudarstvenoe izdateljstvo fiziko-matematičeskoj literaturi, Moskva, 1960;
- [4] SLIEPČEVIĆ, A.: Das Brennpunktgebilde im Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung, *RAD JAZU* [444] 8 (1989), 93-96;
- [5] SLIEPČEVIĆ, A.: Žarišna krivulja u pramenu bicirkularnih krivulja 4. reda, *Zbornik radova XVII Jug. savjetovanja za nacrtnu geometriju*, Zagreb, 1990.

* Die Abbildungen wurden mittels einem PC486 und dem Programm Autodesk AutoCAD for MS Windows Release 12 gezeichnet.

Mr. sc. Ana Sliepčević,
 Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
 10000 Zagreb, Kačićeva 26
 tel: 677-191
 fax: 45-61-206

Constructive Elaboration of the Pedal Surfaces of the (1,2) Congruence

This paper is dedicated to late colleague and friend mr. sc. JOSIP TADIĆ (1947.-1996).

Constructive Elaboration of the Pedal Surfaces of the (1,2) Congruence

ABSTRACT

In this paper the pedal surfaces of the 1st order and 2nd class congruences are deduced by quartic inversion in projective space, using the methods of synthetic geometry. It is shown that there are the 4th order surfaces with a double line, and the constructive elaboration method is given. For one class of these surfaces the parametric equations are derived, and it is shown how they could be drawn using Mathematica®. Some properties of the surfaces are proved and illustrated with the pictures drawn by Mathematica®.

Key Words

(1,2) congruence, pedal surfaces of congruences, quartic inversion, 4th order surfaces with one double line, 4th order surfaces with one double line which contain absolute conic, pinch-points

Konstruktivna obrada nožišnih ploha jedne (1,2) kongruencije

SAŽETAK

U radu su nožišne plohe kongruencija 1. reda i 2. razreda izvedene pomoću kvartne inverzije u projektivnom prostoru P^3 . Dokazano je da su to plohe 4. reda s jednim dvostrukim pravcem koje sadrže apsolutnu koniku kao jednostruku krivulju. Pokazano je da se ove plohe, s obzirom na broj njihovih realnih jednostrukih pravaca, mogu razvrstati u tri skupine.

Za specijalnu (1,2) kongruenciju, kojoj su ravnalice pravac i kružnica koja leži u ravnini okomitoj na taj pravac, izvedene su parametarske jednadžbe nožišnih ploha. Istražena su pojedina svojstva nožišnih ploha (sjecišta kružnih presjeka s dvostrukim pravcem, kuspidalne točke, slučajevi raspada i degeneracije) od kojih su neka ilustrirana konstrukcijama nacrtanim u programu Mathematica®.

Ključne riječi

(1,2) kongruencija, nožišne plohe kongruencija, kvartna inverzija, plohe 4. reda s jednim dvostrukim pravcem, plohe 4. reda s jednim dvostrukim pravcem koje sadrže apsolutu, kuspidalne točke

INTRODUCTION

There are two things that have motivated me to write this type of paper for this journal. The first one is the supposition that the investigation and presentation of numerous forms of high order surfaces in projective space fall into the discipline of constructive geometry. The second one is the fact that by using a computer and combining methods of synthetic and analytic geometry we can achieve good results more easily. In this paper I have used the above mentioned procedure for one class of quartics with a double line. The forms of these quartics could be elaborated in detail by using method of differential geometry, but it is beyond the concept of this paper.

1. THE PEDAL SURFACES OF 1ST ORDER AND 2ND CLASS CONGRUENCES

Let K_n^m be one n^{th} order and m^{th} class congruence and P any finite point in the projective space P^3 . Between the rays of the K_n^m and the planes of the sheaf $\{P\}$ the (1,1) correspondence is defined. Corresponding rays and planes are perpendicular. (The perpendicularity in P^3 derives from polarity with respect to the absolute conic

[7, p.357]). The locus of intersections of the corresponding rays and planes is a surface which is called the *pedal surface* of congruence K_n^m for the pole P . According to Kranjčević[2] it is $(2n+m)^{\text{th}}$ order surface which passes n times through the absolute conic.

The purpose of this paper is to elaborate some pedal surfaces of congruence K_1^2 . It is shown by Sturm[9, p.37] that the rays of congruence K_1^2 can be determined as bisecants of a broken up space curve of 3rd order. Let c be a conic and d a line having a unique common point O . Let γ be the plane of the conic c , and ω be the plane determined by the line d and the tangent o to the conic c at the point O (Fig.1). If lines of the star $\{O\}$ which are not incident with planes γ and ω , and lines in the plane γ which are not incident with a point O , are excluded, the other bisecants of c and d form the congruence $K_1^2(c,d)$. (Fig.2 illustrates the rising of the unique ray through every real point, and Fig.3 the rising of two rays in arbitrary plane when they are real).

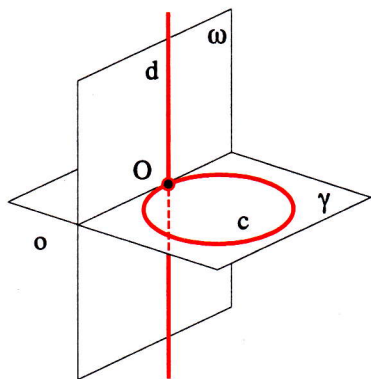


Fig.1

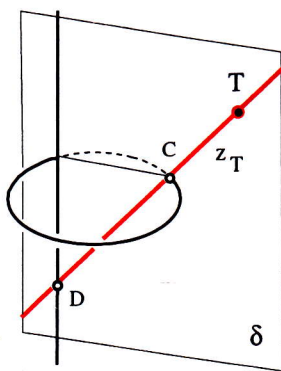


Fig.2

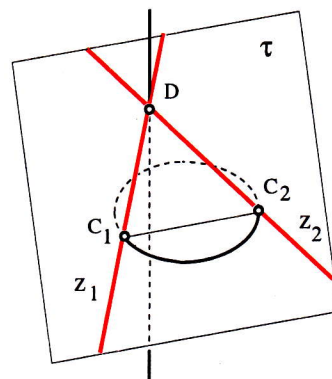


Fig.3

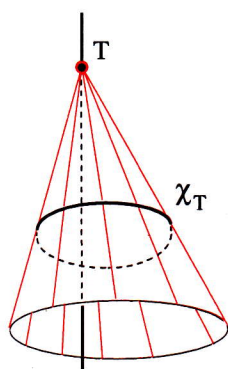


Fig.4

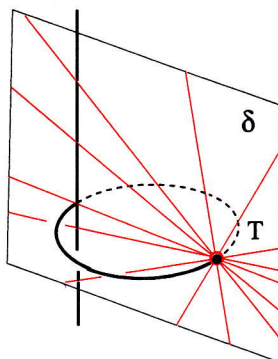


Fig.5

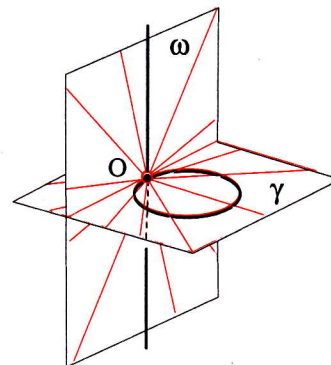


Fig.6

Singular points of $K_1^2(c,d)$ (points through which ∞^1 rays of the congruence pass) lie on the c and d . The rays of $K_1^2(c,d)$ which are incident with a point $T \in d, T \neq O$, generate a 2nd degree cone χ_T determined by the vertex T , and the conic c (Fig.4). The rays of $K_1^2(c,d)$ which are incident with a point $T \in c, T \neq O$, form the pencil of lines (T) in the plane δ determined by T and d (Fig.5). The rays of $K_1^2(c,d)$ which are incident with a point O form two pencils of lines (O) in the planes γ and ω (Fig.6).

Singular planes of $K_1^2(c,d)$ (planes which contain ∞^1 rays of the congruence) are the planes of the pencil $[d]$ and the plane γ .

Inversions with respect to a quadric Ψ , in the projective space P^3 , mean transformations $i_\Psi: P^3 \rightarrow P^3$ where corresponding points A and $i_\Psi(A)$ are conjugate points with respect to Ψ . If lines which pass through A and $i_\Psi(A)$ form $K_1^2(c,d)$, inversion is called the *quartic inversion in space*. It is Cremona transformation with singular points on the curves d, c and e^6 , where e^6 is the 6th order space curve of the double points of the parabolic involutions induced by Ψ on the rays of $K_1^2(c,d)$ [1].

It is proved [1, p.192] that for every plane $\phi, i_\Psi(\phi)$ is the 4th order surface, with the double line d , which contains c and e^6 . These surfaces, according to Sturm[8, p.315], belong to the class of n^{th} order surfaces with a multiple line with the $(n-2)^{\text{th}}$ order of multiplicity. According to [4, p.1575] they form one of the four based types in

Kummer [3] classification of quartics which pass through conics. It was proved by Meyer[4,p.1631-1636] that the 4th order surface with a double line d contains: sixteen simple lines, four pinch-points* on the double line and, besides ∞^1 conics which lie in the planes of the pencil $[d]$, other 128 conics which lie in 64 planes. It is shown [1] which points and lines in the plane ϕ were transformed into the mentioned lines, pinch-points and conics on the surface $i_\Psi(\phi)$.

Theorem 1.1.

The pedal surface Φ of $K_1^2(c,d)$ for the pole P is the image of the plane at infinity given by quartic inversion with respect to $K_1^2(c,d)$ and any sphere with the center P .

Proof. For every point $A \in P^3, i_\Psi(A)$ lies in the polar plane of A with respect to the quadric Ψ . For every point A^∞ at infinity the polar plane with respect to sphere with the center P is the plane through P which is perpendicular to every line which passes through A^∞ . Therefore, if Ψ is a sphere with the center P , for every point $A^\infty \in \phi^\infty, i_\Psi(A^\infty)$ is the intersection of the ray of $K_1^2(c,d)$, which passes through A^∞ and the plane through P which is perpendicular to that ray.

* According to Salmon [6, p.300], the *pinch-points* of a surface locus are points on its double curve at which the two tangent planes coincide; at a pinch-point any section, except certain sections, has a cusp. These points Meyer[4] termed *Kuspidalpunkte*, and in [1] I translated them as *cuspidal points*. Now, I want to match the terms with [6].

Corollary 1.1.

The pedal surface Φ is the 4th order surface with the double line d , and contains the absolute conic.

Proof. That is a direct consequence of the theorem 1.1. and properties of the quartic inversion. Namely, it is proved [1] that for every plane ϕ , quadric Ψ and $K_1^2(c,d)$, $i_\Psi(\phi)$ is the 4th order surface with the double line d which cuts ϕ at two rays of $K_1^2(c,d)$ and the intersection conic of ϕ and Ψ . Since ϕ^∞ cuts a sphere in the absolute conic, Φ passes through it.

Corollary 1.2.

Besides the double line d on the pedal surface Φ only four, two or none simple real lines can exist.

Proof. According to [1] sixteen simple lines of $i_\Psi(\phi)$ are the images of the lines DC_1, DC_2 and DE_i , where $\{D\}=d \cap \phi, \{C_1, C_2\}=c \cap \phi$ and $\{E_i, i=1, \dots, 6\}=e^6 \cap \phi$. If Ψ is a sphere and ϕ the plane at infinity, points E_i lie on the absolute conic, so DE_i are imaginary lines. The point D is always real and C_1, C_2 are real and distinct, real and consecutive or a pair of imaginary points if generatrix c of $K_1^2(c,d)$ is a hyperbola, a parabola or an ellipse. It is clear from the definition of the transformation that a real point is corresponding with a real point and an imaginary with an imaginary point. Since it is true for points, it is also true for lines. Since every of the lines DC_1, DC_2 and DE_i is transformed into one conic which is an image of the point D , and the two lines in the plane of the pencil $[d]$ hence on the surface Φ four, two or none simple real lines exist if c is a hyperbola, a parabola or an ellipse.

Considering corollary 1.2. pedal surfaces of $K_1^2(c,d)$ could be classified by the numbers of simple lines of them.

type of c	number of real simple lines	type of r
hyperbola	4	H
parabola	2	P
ellipse	0	E

Theorem 1.2.

Every plane $\delta \in [d]$, which cuts a conic c in the point C , cuts the pedal surface Φ of $K_1^2(c,d)$ for the pole P in the line d and the circle with the diameter $\overline{CP'}$ where P' is the normal projection of P on the plane δ .

Proof. According to [1] every line $t \subset \delta \in [d]$ is transformed into two conics. One of them is the image of the intersection point of t and d , which doesn't lie in δ , and the other is the image of t given by generalized quadratic inversion (this inversion was described in details by Niče[5]) in the plane δ for the pole C and with respect to the intersection conic of Ψ and δ . In conditions of the theorem the base conic of quadratic inversion is the cir-

cle with the center P' and t is the line at infinity in the plane δ . The image of t^∞ is the locus of intersections of perpendicular lines through C and P' , which is the circle with the diameter $\overline{CP'}$.

This theorem will be the basis for the constructive elaboration of pedal surfaces.

If either of the generatrices c or d be the curve at infinity, the pedal surface Φ , according to [1], breaks up into the plane at infinity and one cubic surface. In other cases, since the plane ϕ^∞ is in general position with respect to the generatrices of $K_1^2(c,d)$, Φ could degenerate or break up only if $P \in d$ or $P \in c$.

2. THE PEDAL SURFACES OF A SPECIAL CONGRUENCE K_1^2

The purpose of this section is to investigate one class of pedal surfaces of the type E and find the way for their construction using Wolfram Research Mathematica®.

This special congruence is determined by the circle c which lies in the plane γ perpendicular to the line d . Since drawing in Mathematica® demands parametric equations of surfaces, $K_1^2(c,d)$ is connected with a right-handed Cartesian coordinate system (O,x,y,z) . The position of generatrices of $K_1^2(c,d)$ and orientations of angles u and v are as in Fig.7.

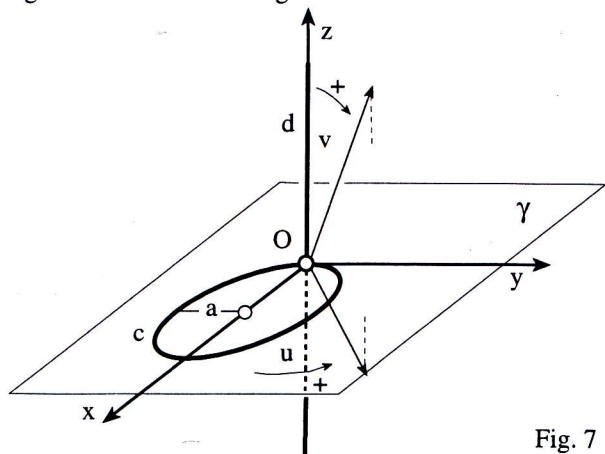


Fig. 7

Since

$$d \equiv x = 0, y = 0$$

$$c \equiv (x - a)^2 + y^2 = a^2, z = 0, a > 0 \text{ and if}$$

$$P \equiv (p, q, r)$$

the pedal surface of $K_1^2(c,d)$ for the pole P is uniquely determined with four numbers a, p, q and r . It will be designated $\Phi[a, p, q, r]$.

It is clear that between the pencil of planes $[d]$ and the semiclosed interval $[-0.5\pi, 0.5\pi]$ one-to-one mapping $u \leftrightarrow \delta(u)$ exists (Fig.8). According to theorem 1.2. every plane $\delta(u)$ cuts $\Phi[a, p, q, r]$ into the circle $\overline{c}(u)$ with the diameter $\overline{CP'}$. In the plane $\delta(u)$ (O,t,z) is the Cartesian coordinate system where axis t , intersection of $\delta(u)$ and the plane xy , has positive orientation in the semi-plane $x \geq 0$ (Fig.8).

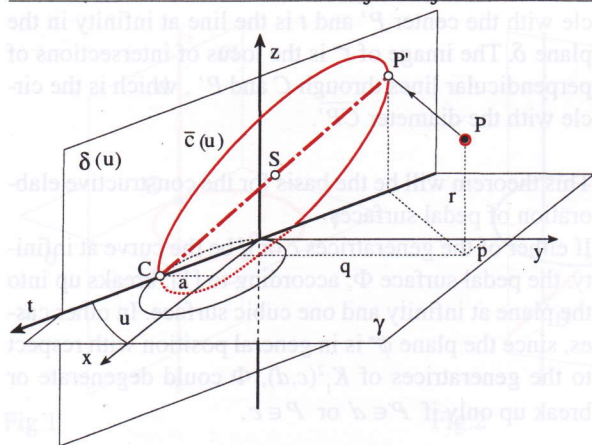


Fig. 8

Since

$$t_C(u) = 2a \cos u \text{ and } t_{P'}(u) = p \cos u + q \sin u$$

then

$$t_S(u) = 0.5((2a + p) \cos u + q \sin u) \text{ and}$$

$$R(u) = 0.5 \sqrt{((2a - p) \cos u - q \sin u)^2 + r^2}.$$

Therefore,

$$t(v) = R(u) \sin v + t_S(u)$$

$$z(v) = R(u) \cos v + 0.5r, \quad v \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

are parametric equations of the circle $\bar{c}(u)$ in the coordinate system (O, t, z) in the plane $\delta(u)$.

Since

$$x = t \cos u \text{ and } y = t \sin u,$$

then

$$x(u, v) = \cos u (R(u) \sin v + t_S(u))$$

$$y(u, v) = \sin u (R(u) \sin v + t_S(u)) \quad (2)$$

$$z(u, v) = R(u) \cos v + 0.5r,$$

$$u \in [-0.5\pi, 0.5\pi], \quad v \in [0, 2\pi]$$

are parametric equations of the surface $\Phi[a, p, q, r]$ in the coordinate system (O, x, y, z) . It is clear that v -curves are circles in the planes $\delta(u)$ of the pencil $[d]$, and u -curves will be used only for drawing and they will not be analysed.

One of the parameters a, p, q, r could be eliminated from the equations (2), but trying to preserve the geometric interpretation of these numbers we use the form (2).

Now, Mathematica® can draw every surface $\Phi[a, p, q, r]$.

One example is shown in the Fig. 9.

```
In[1]:=
<<Graphics'ParametricPlot'
<<Graphics'Colors'
A[RGBColor[r_, g_, b_]]:=RGBColor[r, 0, 0]
A[GrayLevel[x_]]:=GrayLevel[1-x]
T[a_, p_, q_]:=5(2a Cos[u]+p Cos[u]+q Sin[u])
R[a_, p_, q_, r_]:=5Sqrt[(2a Cos[u]-p Cos[u]-q Sin[u])^2+r^2]
X[a_, p_, q_, r_]:=Cos[u](Sin[v] R[a, p, q, r]+T[a, p, q])
Y[a_, p_, q_, r_]:=Sin[u](Sin[v] R[a, p, q, r]+T[a, p, q])
Z[a_, p_, q_, r_]:=Cos[v] R[a, p, q, r]+5r
ParametricPlot3D[{X[3, -2, 4, 1], Y[3, -2, 4, 1], Z[3, -2, 4, 1]},
{u, -Pi/2, Pi/2, Pi/40}, {v, 0, 2Pi, Pi/12}, ViewPoint->{1, 4.5, -3},
Boxed->False, Ticks->None, Axes->False,
ColorOutput->A, Background->GrayLevel[.2]]
```

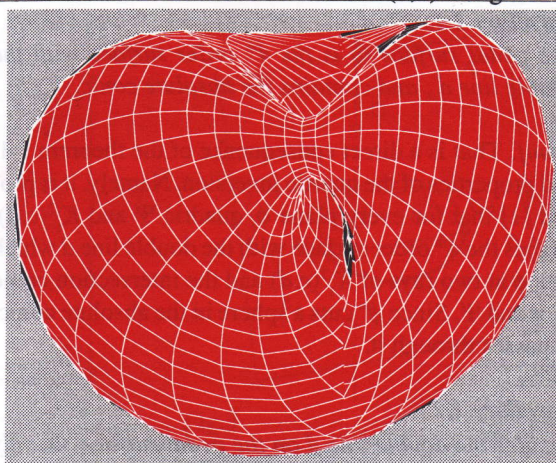


Fig.9

In order to make forms of surfaces clearer we can present only parts of them. Generatrices of $K_1^2(c, d)$ and a pole P can be drawn on $\Phi[a, p, q, r]$, too. By changing a view-point a surface could be seen in the best way. A few examples are shown in Fig. 10. Because of the loss of the four colours and thus reduced clarity of the pictures, some details (points, blackening of some lines) are added to Mathematica graphics.

The further investigation of the surfaces $\Phi[a, p, q, r]$ (the areas of the elliptic, parabolic or hyperbolic points; the real singular points which depend on the coordinates p, q, r ; the Gaussian and geodesic curvature; a geodesic lines, etc.) which demands methods of differential geometry is beyond the concept of this paper, as it is said in the introduction.

3. SOME PROPERTIES OF THE SURFACES $\Phi[a, p, q, r]$

In the cylindrical coordinate system (O, t, u, z) the system of v -curves i.e., circles $\bar{c}(u)$, is presented by equations:

$$(t - t_S(u))^2 + (z - 0.5r)^2 = R^2(u), \quad u \in [-0.5\pi, 0.5\pi] \quad (3)$$

Proposition 3.1.

$\Phi[a, p, q, r]$ is symmetric with respect to the plane $z=0.5r$.

Proof. For every center S of the $\bar{c}(u)$, $z_S = 0.5r$.

Proposition 3.2.

Circles $\bar{c}(u_1)$ and $\bar{c}(u_2)$ meet the line d in the same

points if and only if $u_1 + u_2 = \arctan \frac{q}{p}$.

Proof. If $t=0$ then from (3) the intersection points of

$\bar{c}(u)$ and d are $(0, 0, \pm \sqrt{R^2(u) - t_S^2(u)} + 0.5r)$.

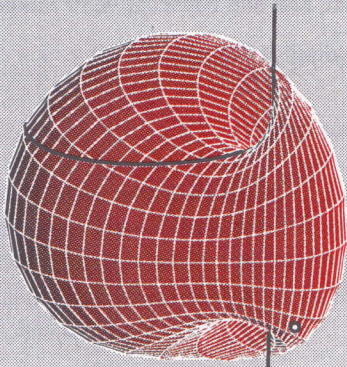


Fig. 10.1
 $\Phi [3,-1,2,-4]$, viewpoint $(-1,4,1.5)$

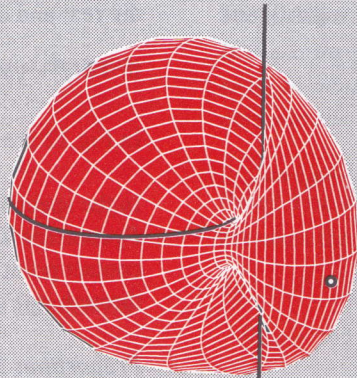


Fig. 10.2
 $\Phi [3,-2,2,-1]$, viewpoint $(-1,4,1.5)$

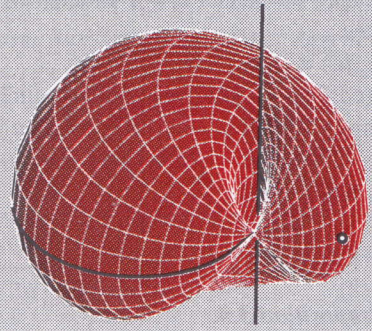


Fig. 10.3
 $\Phi [3,-1,3,0]$, viewpoint $(2,6,5)$

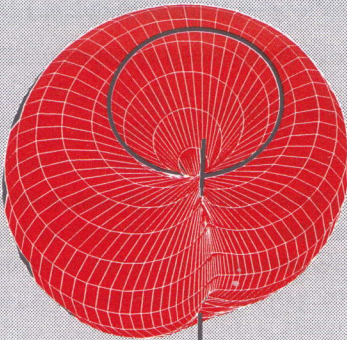


Fig. 10.4
 $\Phi [3,2,2,-10]$, viewpoint $(-3,0.25,5)$

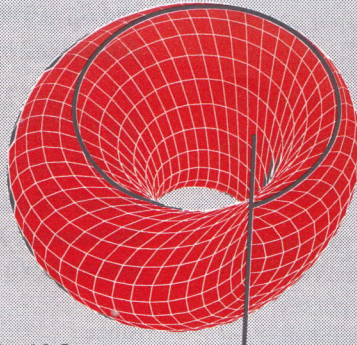


Fig. 10.5
 $\Phi [3,4,2,-4]$, viewpoint $(-3,1,4)$

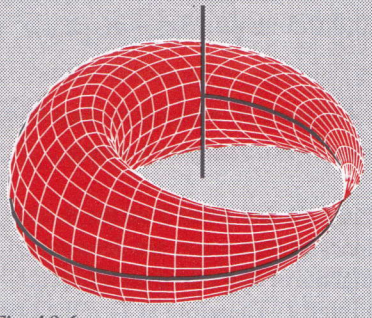


Fig. 10.6
 $\Phi [3,4,2,0]$, viewpoint $(6,1,4)$



Fig. 10.7
 $\Phi [3,-1,0,0]$, viewpoint $(-2,3,4)$

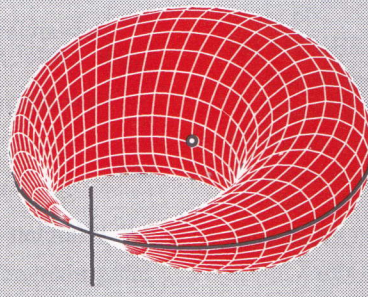


Fig. 10.8
 $\Phi [3,3,0,0]$, viewpoint $(-5,-3,4)$

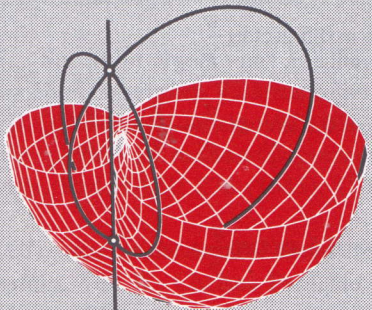


Fig. 11.
 $\Phi [3,-2,2,0.5]$, $u_I = \pi/8$, $u_{II} = -3\pi/8$

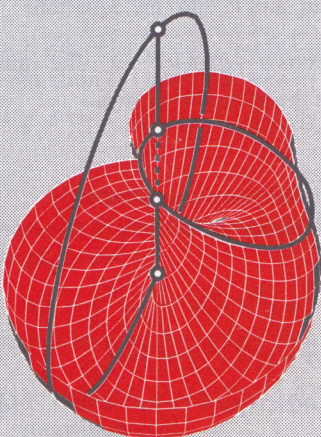


Fig. 12.1
 $\Phi [3,-2,2,4]$, $u_I = -\pi/8$, $u_{II} = 3\pi/8$

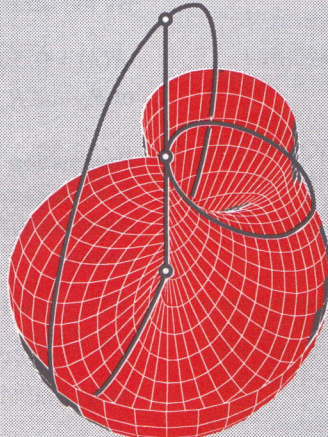


Fig. 12.2
 $\Phi [3,-2,2, 2\sqrt{6(\sqrt{2}-1)}]$, $u_I = -\pi/8$, $u_{II} = 3\pi/8$

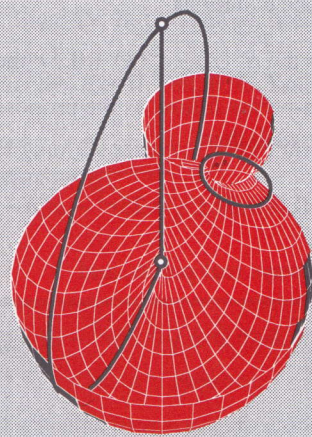


Fig. 12.3
 $\Phi [3,-2,2,1]$, $u_I = -\pi/8$, $u_{II} = 3\pi/8$

If $\Phi[a,p,q,r]$ doesn't break up** (i.e., $p \neq 0 \vee q \neq 0$) and $\delta(u_1) \neq \delta(u_2)$ (i.e., $u_1 \neq u_2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$) then

$$\begin{aligned} {}_1z_2(u_1) &= {}_1z_2(u_2) \Leftrightarrow \\ p(\cos 2u_1 - \cos 2u_2) &= q(\sin 2u_2 - \sin 2u_1) \Leftrightarrow \\ p \sin(u_1 + u_2) \sin(u_1 - u_2) &= q \cos(u_1 + u_2) \sin(u_1 - u_2) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$u_1 + u_2 = \arctan \frac{q}{p}.$$

In Fig.11 is one example.

Proposition 3.3.

If the special case ($p > 0, q = r = 0$) is excluded the pinch-points of $\Phi[a,r,q,r]$ are

$$\left(0, 0, 0.5r \pm \sqrt{0.25r^2 - a(p \pm \sqrt{p^2 + q^2})} \right)$$

If $4a(p + \sqrt{p^2 + q^2}) \leq r^2$, then $\Phi[a,p,q,r]$ has four, three or two real pinch-points.

Proof. At any point T on the double line d two tangent planes of $\Phi[a,p,q,r]$ are determined by d and two tangents of any curve on $\Phi[a,p,q,r]$ which passes through T . Therefore at $T \in d$ the two tangent planes are the planes of two circles $\bar{c}(u)$ which pass through T . From the proposition 3.2. it is clear that the two tangent planes coincide for the angles u_i and u_{ii} if

(i) $u_i = 0.5 \arctan \frac{q}{p},$

$$u_{ii} = 0.5 \arctan \frac{q}{p} - \frac{\pi}{2} \text{ if } \frac{q}{p} \geq 0,$$

or

(ii) $u_i = 0.5 \arctan \frac{q}{p},$

$$u_{ii} = 0.5 \arctan \frac{q}{p} + \frac{\pi}{2} \text{ if } \frac{q}{p} < 0$$

Since the planes $\delta(u_i)$ and $\delta(u_{ii})$ are the tangent planes at the pinch-points, by the substitution of u_i and u_{ii} into the equations

$${}_1z_2 = \pm \sqrt{R^2(u) - r_s^2(u)} + 0.5r \text{ the coordinates of}$$

pinch-points follow as the proposition says.

Since $a > 0$ then

$${}_1P_2 \left(0, 0, 0.5r \pm \sqrt{0.25r^2 - a(p - \sqrt{p^2 + q^2})} \right)$$

are always real points, and

$${}_3P_4 \left(0, 0, 0.5r \pm \sqrt{0.25r^2 - a(p + \sqrt{p^2 + q^2})} \right)$$

** The cases when these pedal surfaces break up will be elaborated later in the paper.

are real and distinct, real and consecutive or imaginary

$$\text{if } 4a(p + \sqrt{p^2 + q^2}) \leq r^2.$$

In Fig.12 are three examples.

In the special case ($p > 0, q = r = 0$) the points P_1 and P_2 coincide with the point O , and O is not a cusp but a contact point of two branches of the any plane section through it (Fig.10.8).

Proposition 3.4.

Circles of the system (3) with extreme radii $R_m = 0.5r$

and $R_M = 0.5\sqrt{(2a-p)^2 + q^2 + r^2}$ lie in the planes determined by angles

$$u_m = \arctan \frac{2a-p}{q} \text{ and } u_M = \arctan \frac{q}{p-2a}.$$

Proof. Considering our geometrical interpretation of the function R it is clear that $R(u_1) \leq R(u_2) \Leftrightarrow R^2(u_1) \leq R^2(u_2)$.

Since

$$(R^2(u))' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2a-p) \sin u + q \cos u = 0 \\ (2a-p) \cos u - q \sin u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \arctan \frac{q}{p-2a} \\ u = \arctan \frac{2a-p}{q} \end{cases}$$

and

$$(R^2)''(\arctan \frac{q}{p-2a}) = -2((2a-p)^2 + q^2) < 0,$$

$$(R^2)''(\arctan \frac{2a-p}{q}) = 2((2a-p)^2 + q^2) > 0$$

then u_M is the maximum and u_m is the minimum of the function R^2 .

By the substitution of u_M and u_m into the equation

$$R(u) = 0.5\sqrt{((2a-p) \cos u - q \sin u)^2 + r^2} \text{ the values of } R_M \text{ and } R_m \text{ follow as the proposition says.}$$

Proposition 3.5.

In homogeneous Cartesian point coordinates ($x:y:z:w$) the general equation of $\Phi[a,p,q,r]$ can be written

$$\begin{aligned} F(x,y,z,w) &= (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) - \\ &\quad - ((2a+p)x + qy + rz)(x^2 + y^2)w + \\ &\quad + 2ax(px + qy)w^2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Proof.

- (i) If $x^2 + y^2 \neq 0$, and $w=1$ the equation (4) and the equation

$$x^2 + y^2 + z^2 - (2a + p)x - qy - rz + \frac{2ax(px + qy)}{x^2 + y^2} = 0 \quad (5)$$

are equivalent.

Replacing x by $t \cos u$ and y by $t \sin u$ the preceding equation takes the form

$$t^2 + z^2 - ((2a + p) \cos u + q \sin u)t - rz + 2a \cos u (p \cos u + q \sin u) = 0 \quad (6)$$

which is the expanded form of the equation (3).

- (ii) The other points which satisfy the equations $x^2 + y^2 = 0$ and $F(x, y, z, w) = 0$ are the points of the line z , i.e. $(0:0:z:w)$, and the absolute points $(1:\pm i:0:0)$ of the plane xy . Since it is easy to show that the partial derivatives F_x, F_y, F_z, F_w vanish in the every point $(0:0:z:w)$ and $(1:\pm i:0:0)$, the points of the line z , and the absolute points of the plane xy are singular points of the surface $F(x, y, z, w) = 0$ (Woods[10,p.206]).

Proposition 3.6.

The plane at infinity cuts the surface $\Phi[a, p, q, r]$ in the absolute conic and the pair of isotropic lines through the point at infinity of the line d .

Proof. For $w=0$ the equation (4) takes the form

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) = 0, \text{ and}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, w = 0$$

are the equations of the absolute conic, and

$$x^2 + y^2 = 0, w = 0$$

are the equations of the isotropic lines through the point $(0:0:1:0)$.

Proposition 3.7.

If $P \in d$ the pedal surface $\Phi[a, p, q, r]$ breaks up into one sphere and the isotropic planes through d .

Proof. For $P \in d$, i.e., $p = 0 \wedge q = 0$, and $w = 1$ the equation (4) takes the form

$$(x^2 + y^2)((x - a)^2 + y^2 + (z - 0.5r)^2 - a^2 - 0.25r^2) = 0. \quad (7)$$

Since $x^2 + y^2 = 0$ is the equation of the isotropic planes through d , and

$$(x - a)^2 + y^2 + (z - 0.5r)^2 - a^2 - 0.25r^2 = 0$$

is the equation of the sphere with the center $(a, 0, 0.5r)$

and the radius $\sqrt{a^2 + 0.25r^2}$, $\Phi[a, p, q, r]$ breaks up as the proposition says.

Proposition 3.8.

If $P \in c$ the pedal surface $\Phi[a, p, q, r]$ doesn't degenerate in general case. But, for $P(2a, 0, 0)$ it degenerates into the generatrices of $K_1^2(c, d)$.

Proof. For $P \in c$, i.e., $q = \pm \sqrt{p(2a - p)}$, $r = 0$, equation (4) takes the form

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) - ((2a + p)x \pm \sqrt{p(2a - p)}y)(x^2 + y^2)w + 2ax(px \pm \sqrt{p(2a - p)}y)w^2 = 0 \quad (8)$$

which in general presents a proper surface. But, for $p = 2a$, $q = 0$ and $w = 1$ the equation (4) takes the form

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 + z^2(x^2 + y^2) = 0. \quad (9)$$

All real points which satisfy this equation are points on

the conic $c \equiv x^2 + y^2 - 2ax = 0, z = 0$

and the line $d \equiv x = 0, y = 0$.

REFERENCES

- [1] GORJANC, S.: Quartic Inversion in Space and some of its Product, Rad HAZU [470] 12 (1995), 187-197.
- [2] KRANJČEVIĆ, E.: Die Fusspunktflächen der linearen Kongruenzen, Glasnik matematički 3 (23) (1968), 269-274.
- [3] KUMMER, E. E.: J. reine angew. Math. 64 (1865) p. 66
- [4] MEYER, W. Fr.: Spezielle algebraische Flächen, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band III, 2 Teil, B. G. Taubner, Leipzig, 1921-1934.
- [5] NIČE, V.: Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću kvadratne inverzije, Rad HAZU 278 (1945), 153-194.
- [6] SALMON, G.: A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions, vol. II., Chelsea Publishing Company, New York, 1965.
- [7] SEMPLE, J. G. and KNEEBONE, G. T.: Algebraic Projective Geometry, Oxford-Clarendon Press, London, 1952.
- [8] STURM, R.: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Band IV, B. G. Taubner, Leipzig und Berlin, 1909.
- [9] STURM, R.: Liniengeometrie, II. Teil, B. G. Taubner, Leipzig, 1893.
- [10] WOODS, F. S.: Higher Geometry, Dover Publications, INC., New York, 1961.

Mr. sc. Sonja Gorjanc

Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,

10000 Zagreb, Kačićeva 26

tel: 216-524, fax: 220-024

e-mail: sgorjanc@master.grad.hr

Crtanje jajolikih krivulja

Drawing of Bird-egg Forms

ABSTRACT

Using Maple V we compared the data of original bird-eggs given by JAKAB[2] with the theoretical results given by Wunderlich. It turned out that for the eggs of the bird *Sterna hirundo* the parabolic cubic and the Kirste profile were almost identical, and their plots coincided with the curves drawn by oologists. But, for the eggs of the birds *Sterna paradisaea* and *Sterna dougallii* differences were greater.

Key Words

bird-eggs, egg-shaped curves, Kirste profile, symmetric parabolic cubic

Crtanje jajolikih krivulja

SAŽETAK

U radu su pomoću programa Maple V, prema podacima koje je JAKAB [2] dobio mjerenjem, nacrtane dvije vrste krivulja (simetrična parabolična kubika i Kirsteov profil koje je predložio Wunderlich). Pokazano je da se te dvije krivulje i crteži oologa među sobom gotovo nimalo ne razlikuju za jaja ptice *Sterna hirundo*, odn. obične čigre, dok je kod jaja druge dvije vrste čigri, tj. polarne (*Sterna paradisaea*) i ružičaste čigre (*Sterna dougallii*), bilo odstupanja.

Ključne riječi

ptičja jaja, jajolike krivulje, Kirsteov profil, simetrična parabolična kubika

UVOD

Jedan dio biomatematike je *biogeometrija*, koja biološke pojave promatra sa stanovišta geometrije. Primjer za to je rad WUNDERLICH [6] u kojem su dani prijedlozi za crtanje oblika osnog presjeka ptičjeg jajeta (jajolikih krivulja) pomoću funkcija. U istom radu postavlja se pitanje da li su ovako dobivene jajolike krivulje stvarno jednake formi jajeta čiji su podaci korišteni prilikom računanja i crtanja. Da bi odgovorili na ovo pitanje korištena su konkretna mjerenja oologa JAKABA [2], znanstvenika koji se bavi izučavanjem ptičjih jaja (promatra oblik, veličinu, težinu i druge karakteristike cijelog jajeta, odnosno ljuske jajeta).

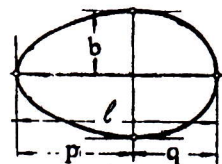
Klasificiranje ptičjih jaja vrlo je star znanstveni problem. Najstarije poznato djelo koje daje opise jaja evropskih ptica knjiga je J. T. Kleina "Sammlung verschiedener Vögel Eyer in natürlicher Grösse und mit lebendigen Farben geschildert und beschrieben" iz 1766. godine (MAKATSCH [3]).

Pokazano je (NAGY F. [4]) da se od jajolikih krivulja

koje je predložio Wunderlich, Kirsteov profil gotovo uvijek, a uz uvjet $p \neq q$, i simetrična parabolična kubika također gotovo uvijek mogu koristiti za crtanje, ali nikada neće dati neuobičajenu formu (npr. kruške) (ERÖS [1]). Drugo je pitanje koliko se dobiveni crteži među sobom razlikuju i da li stvarno predstavljaju formu promatranog jajeta.

1. OZNAČAVANJE

Ptičje jaje smatramo rotacijskom plohom, a njegov osni presjek jajolikom krivuljom. Veličinu l nazivamo duljinom, a $2b$ širinom jajeta (Slika 1). Ravnina najvećeg presjeka okomitog na os rotacije dijeli l u omjeru $p : q$, $p \geq q$.



Slika 1

Označavanje

Uobičajeno je da se za klasifikaciju ptičjih jaja po obliku uz ostalo koriste omjer duljine i širine $l/2b$ (≥ 1), odnosno omjer odsječaka na duljinskoj osi p/q (≥ 1) (SCHÖNWETTER [5]).

W. Wunderlich je za crtanje jajolike krivulje predložio Descartesov oval, simetričnu paraboličnu kubiku, torusnu liniju i Kirsteov profil.

Prema WUNDERLICHU [6], *simetrična parabolična kubika* dana funkcijom

$$ky^2 = x(l-x)(x+u) \quad (1.1)$$

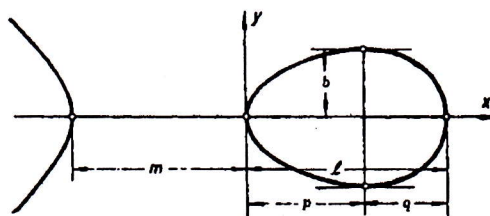
predstavlja jajoliku krivulju nad intervalom $[0,1]$ s ekstremnim točkama $(p, \pm b)$ ako su parametri

$$l = p + q,$$

$$u = \frac{pq}{p-q} - p, \quad (1.2)$$

$$k = \frac{p^2 q^2}{b^2 (p-q)}$$

Očito je da se ova formula na zadanom intervalu i uz uvjete ekstrema *ne može* koristiti za crtanje kuglastih i elipsoidnih ptičjih jaja.



Slika 2

Simetrična parabolična kubika

Kirsteov profil dan je sustavom parametarskih jednadžbi

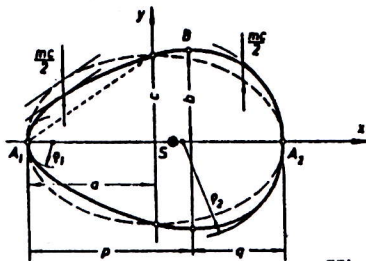
$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= c \sin t(1 + m \cos t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$(0 < m < 1), t \in [0, 2\pi]$

Wunderlich je pokazao da (1.3) daje jajoliku krivulju ako je

$$\begin{aligned} a &= \frac{l}{2} = \frac{p+q}{2}, \\ c &= \frac{bl\sqrt{pq}}{8p^2q^2} (6pq - p^2 - q^2), \\ m &= \frac{p^2 - q^2}{6pq - p^2 - q^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

To bi bila nekonveksna krivulja ako je $\sqrt{2}/2 < m < 1$. No, stvarne dimenzije ptičjih jaja ne zadovoljavaju ovaj uvjet (NAGY F. [4]).



Slika 3

Kirsteov profil

2. PRIMJENA SIMETRIČNE PARABOLIČNE KUBIKE I KIRSTEOVA PROFILA

Za crtanje jajolikih krivulja koristimo JAKABOVE [2] podatke o tri vrste ptičjih jaja iste duljine i širine, ali raznih oblika, dane u Tabeli 1.

duljina l (mm)	$1/2$ širine b (mm)	p	q
36	14,5	19,0	17,0
37	14,75	20,5	16,5
38	14,80	20,4	17,6
39	14,70	21,2	17,8
40	14,85	22,0	18,0
41	14,85	22,6	18,4
42	15,05	23,9	18,1
43	15,15	24,3	18,7

Tabela 1.

Sterna hirundo, *Sterna paradisaea*, *Sterna dougallii*

Prvo promatramo simetričnu paraboličnu kubiku. Uvrštavanjem parametara (1.2) u formulu (1.1) dobivamo u eksplicitnom obliku funkciju

$$y = \frac{b}{pq} \sqrt{x(p+q-x)(p-q)} \sqrt{x + \frac{pq}{p-q} - p}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.1)$$

Ova jednadžba ovisi o vrijednostima p , q i b i predstav-

lja polovicu jajolike krivulje.

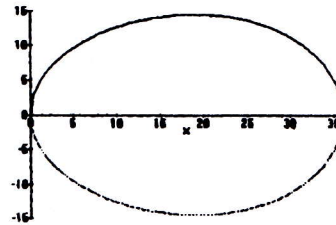
Ako je iz prvog retka tabele

$$f_1 := \text{subs}(p=19, q=17, b) \quad (2.2)$$

onda

$$\text{plot}(\{f_1, -f_1\}, x=0..36) \quad (2.3)$$

u programu Maple V znači naredbu za crtanje jajolike krivulje na slici 4.



Slika 4

Crtež jajolike krivulje duljine 36 mm pomoću simetrične parabolične kubike

Sada promatramo *Kirsteov profil*. Uvrštavanjem formula (1.4) u jednadžbe (1.3) slijedi

$$x_1 := \frac{p+q}{2} \cos t \quad (2.4a)$$

$$y_1 := \frac{(6pq - p^2 - q^2)b(p+q) \sin t (1 + \frac{(p^2 - q^2) \cos t}{6pq - p^2 - q^2})}{8p^{3/2}q^{3/2}} \quad (2.4b)$$

Dobivene jednadžbe jajolike krivulje ovise o mjerenim podacima dobivenim za p , q i b . Zamjenom vrijednosti prvog retka tabele dobivamo

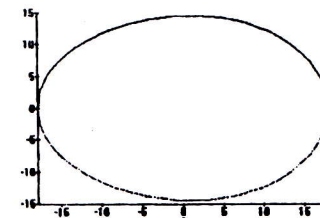
$$x_{11} := 18 \cos t \quad (2.5a)$$

$$y_{11} := 14.4775 \sin t (1 + 0.0559 \cos t). \quad (2.5b)$$

Nareba za crtanje

$$\text{plot}(\{x_{11}, y_{11}\}, t=0..2*\text{Pi}) \quad (2.6)$$

daje krivulju sa slike 5.



Slika 5

Crtež jajolike krivulje duljine 36 mm pomoću Kirsteova profila

Na isti način, za sedam ostalih grupa podataka iz Tabele 1 nacrtane su obje krivulje, parabolična simetrična kubika i Kirsteov profil.

Razlike u dobivenim crtežima jajolikih krivulja nismo mogli primijetiti. Usporedba s crtežima oologa pokazala je da su krivulje pogodne za crtanje jaja ptice *Sterna hirundo*, ali ne i za jaja ptica *Sterna paradisaea* i *Sterna dougallii*, gdje su odstupanja bila značajna, naročito na užim krajevima.

U sljedećem je koraku valjalo ispitati zakrivljenost krivulja. Pomoću Maple V programa bilo je moguće izračunati prve i druge derivacije obje funkcije za sve podatke. Međutim, nisu se mogle primijetiti razlike u krivuljama ovih funkcija kao ni u grafovima zakrivljenosti.

3. FUNKCIJA RAZLIKE

Ipak, da bismo usporedili dobivene krivulje, definirali smo funkciju razlike. U tu svrhu simetrična parabolična kubika translirana je tako da se njeno područje definicije poklapa s područjem definicije Kirsteova profila. Sada je simetrična parabolična kubika umjesto s (2.1) prikazana jednažbom

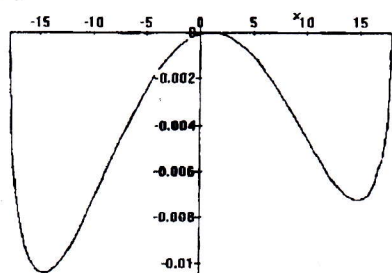
$$y := \frac{b}{pq} \sqrt{\left(x + \frac{p+q}{2}\right)\left(\frac{p+q}{2} - x\right)} \sqrt{x + \frac{pq}{p-q} - \frac{p-q}{2}} \sqrt{p-q}. \quad (3.1)$$

Uvrštavanjem vrijednosti za p , q i b iz Tabele 1 dobivamo dio simetrične parabolične kubike koja je polovica jajolike krivulje nacrtane na intervalu $[-(p+q)/2, (p+q)/2]$.

Obilježimo s y_i i y_{1i} , $i=1,2,\dots,8$, funkcije koje dobivamo uvrštavanjem podataka iz i -tog retka Tabele 1 u formule (3.1) i (2.4b).

Funkciju razlike za podatke iz i -tog retka Tabele 1 definirali smo s

$$d_i := y_i - y_{1i}. \quad (3.2)$$

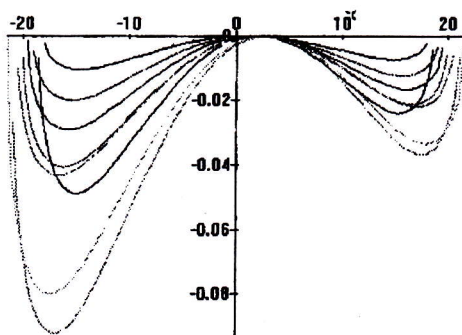


Slika 6

Funkcija razlike d_1

Funkcija d_1 je pokazala da su odstupanja vrlo mala, a da su kod parabolične kubike vrijednosti uvijek manje.

Na slici 7 nacrtano je u istom koordinatnom sustavu svih osam funkcija razlike.



Slika7

Funkcije razlike za podatke iz Tabele 1.

Možemo zaključiti:

1. maksimalno je odstupanje vrijednosti parabolične kubike i Kirsteova profila u slučaju $l = 42$ mm, ali ni to se golim okom ne može primijetiti. Stoga je opravdano reći da su za crtanje jaja *Sterna hirundo* obje funkcije jednako pogodne;
2. parabolična kubika je uvijek unutar Kirsteova profila, znači pogodnija je za crtanje užih jajolikih krivulja.

LITERATURA

- [1] ERÖSS, L.: The Function of Shape in Bird-eggs, AQUILA — Ann. Inst. Ornith. Hung. 1983., pp. 159-175.
- [2] JAKAB, B.: A küszvágó csér-(Sterna hirundo l.) — tojások meghatározásának kérdése, A Móra F. Múzeum Évkönyve Vol. 15, No. 1, 1972-73. pp. 225-235.
- [3] MAKATSCH, W.: *Die Eier der Vögel Europas*, Neumann Verlag, Leipzig-Radebeul 1972.
- [4] NAGY F., Gy.: Practical and Theoretical Determination of Bird-eggs. Proceedings of 6th ICECGDG, Tokyo 1994. pp. 150-154.
- [5] SCHÖNWETTER, M.: *Handbuch der Oologie*, Vol. 41. Akademie-Verlag, Berlin, 1985. pp. 1-64.
- [6] WUNDERLICH, W.: Zur Geometrie der Vogeleeier, Sitzungsberichte der ÖAW, Mathem.-Naturw. Kl., Abt. II, Vol. 187, No. 1-3, 1979. pp. 1-19.

Dr. sc. Györgyi Führer Nagy
Erdészeti és Faipari Egyetem
Sopron, Pf. 132
H - 9401
tel: 9936 99 311 103
e-mail: fur@efe.hu

Grafički prikaz konika pomoću računala

Computer-aded Graphical Representation of Conic Sections

ABSTRACT

The paper presents a detailed classification of conic sections or second order curves. The conic sections are first classified into central and non-central, and then to their subtypes. The purpose of such classification is to obtain analytical apparatus by means of which the necessary conclusions about the conics can be made and furthermore, graphically presented on the basis of given coefficients being included into the general form of the conic section equation. In order to draw arbitrary curves, and also conic sections by means of computer, it is very convenient to use their equations in parametric form. Therefore, the corresponding equation in the parametric form have been suggested for each type of the conic section. A numeric example has been given for each type of the conic section.

Key Words

conic sections classification, graphical representations of conic sections

Grafički prikaz konika pomoću računala SAŽETAK

U radu je prikazana jedna detaljna klasifikacija konika ili krivulja drugog reda. Konike se najprije dijele na centralne i necentralne, a zatim na njihove podtipove. Svrha takve klasifikacije je dobivanje analitičkog aparata pomoću kojega možemo na temelju zadanih koeficijenata koji ulaze u opću jednadžbu konike izvesti potrebne zaključke o konici i zatim je grafički prikazati. Za crtanje proizvoljnih krivulja, pa tako i konika pomoću računala, pogodne su njihove jednadžbe u parametarskom obliku. Stoga su za svaki tip konike predložene i odgovarajuće jednadžbe u parametarskom obliku. Za svaki tip konike dan je i poseban numerički primjer.

Ključne riječi

klasifikacija krivulja 2. reda, prikazi krivulja 2. reda

1. UVOD

Proučavanje konika ili krivulja drugog reda spada u područje analitičke geometrije i linearne algebre. U različitom opsegu o krivuljama drugog reda pisali su npr. Aleksandrov (1979.), Bugrov i Mikolskij (1984.), Iljin i Poznjak (1981.), Javor (1990.), Kajgorodov (1985.), Kaplan (1968.), Krutickaja i Šiškin (1985.),

Kurepa (1990.), Manturov i Matveev (1986.), Mitrinović, Mihailović i Vasić (1979.), Pavković i Veljan (1995.), Pettofrezzo (1966.), Rašajski (1983.) i mnogi drugi.

Računala nam, između ostalog, omogućuju grafičko prikazivanje različitih krivulja. Da bismo u nekom od viših programskih jezika (npr. BASIC-u) sastavili program za crtanje proizvoljne krivulje drugog reda na osnovi njene jednadžbe u općem obliku, moramo imati napravljenu detaljnu klasifikaciju krivulja drugog reda i zatim za svaki tip krivulje pronaći njenu jednadžbu u parametarskom obliku, jer je takav oblik najpodesniji za dobivanje grafičkih prikaza pomoću računala.

2. KONIKE

Najopćenitija jednadžba drugog stupnja od dvije varijable x i y može se napisati u obliku

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (2.1)$$

gdje su a, b, c, d, e, f realni brojevi i barem jedan od brojeva a, b i c različit od nule. Geometrijsko mjesto točaka (x, y) u ravnini čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu (2.1) nazivamo konusnim presjekom ili jednostavno konikom. Pomoću rotacije ravnine oko ishodišta i translacije ravnine moguće je svaku koniku prikazati u standardnom ili kanonskom obliku. U nastavku ćemo pokazati kako se to može napraviti.

Funkciju $F(x, y)$ iz jednadžbe (2.1) možemo napisati i u obliku

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Uočimo da je matrica

$$\Delta = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

koja određuje koniku realna simetrična matrica. Ta se matrica naziva matricom konusnog presjeka. Osim matrice Δ , realna matrica

$$\delta = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

od osnovne je važnosti pri analizi jednadžbe (2.1).

Naime, pomoću matrice δ možemo napisati

$$F(x, y) = [x \ y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2[d \ e] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0. \quad (2.5)$$

Poznato je (vidi npr. Kurepa 1990.) da se svaka realna simetrična matrica δ može napisati u obliku

$$\delta = V \Lambda V^T, \quad (2.6)$$

gdje su matrice Λ i V sljedećeg oblika:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Pri tome su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice δ , dakle rješenja kvadratne jednačbe

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0, \quad (2.8)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[a+c + \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)} \right], \quad (2.9)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[a+c - \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)} \right]. \quad (2.10)$$

S obzirom na to da se izraz ispod korijena može napisati u obliku zbroja kvadrata

$$(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2, \quad (2.11)$$

najprije zaključujemo da su λ_1 i λ_2 uvijek realni brojevi. Zatim, $\lambda_1 = \lambda_2$ ako i samo ako je $a=c$ i $b=0$. Konačno, ne može biti $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, jer bi tada moralo biti $a=b=c=0$, što je u suprotnosti s početnom pretpostavkom.

Stupci ortogonalne matrice V komponente su jediničnih svojstvenih vektora v_1 i v_2 matrice δ koji pripadaju svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2 . Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, tj. $a=c$ i $b=0$, tada se lako vidi da je svaki vektor u ravnini svojstveni vektor matrice δ i da kut θ nije jednoznačno određen. Ako svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 nisu međusobno jednake, onda vrijedi relacija

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2b}{a-c} \quad (2.12)$$

iz koje možemo izračunati kut θ (usporediti Kurepa, 1990.). Međutim, osim kuta θ , relaciju (2.12) zadovoljavat će i kutovi $\theta + k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. To znači da relacijom (2.12) kut θ nije jednoznačno određen i da bez daljnjeg ispitivanja ostaje nejasno koji od tih smjerova određuje položaj svojstvenog vektora v_1 . Drugim riječima, ako je

$$v = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

svojstveni vektor matrice δ , onda su i

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

također svojstveni vektori te matrice. Zbog toga ćemo umjesto formule (2.12) radije primjenjivati formulu

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\lambda_1 - a}{b}, \quad (2.13)$$

koja se lako dobije iz relacije

$$\delta v_1 = \lambda_1 v_1 \quad (2.14)$$

kojom se zapisuje da je v_1 svojstveni vektor matrice δ kojem odgovara svojstvena vrijednost λ_1 .

Činjenica da osim kuta θ relaciju (2.13) zadovoljavaju i kutovi oblika $\theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ne otežava daljnju primjenu, jer je očito svejedno koji ćemo od njih uzeti za smjer svojstvenog vektora v_1 (možemo uzeti npr. $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$).

Prilikom programiranja formule (2.13) moramo voditi računa o tome da će ona zatajiti u slučaju kad je $b=0$. Zato taj slučaj treba promatrati odvojeno. Lako se pokaže da tada mora biti $\theta=0$.

Prema (2.7) svojstveni vektor v_2 je

$$v_2 = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix},$$

što znači da će uređeni par (v_1, v_2) biti pozitivno orijentiran. Neka je

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = V^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

što možemo geometrijski protumačiti kao rotaciju koordinatnog sustava x, y oko ishodišta za kut θ . Tada je zbog ortogonalnosti matrice V :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

dok izraz (2.5) prelazi u

$$\begin{aligned} F(x, y) &= [x \ y] V \Lambda V^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2[d \ e] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = \\ &= [x' \ y'] \Lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 2[d \ e] V \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = \\ &= [x' \ y'] \Lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 2[\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = \\ &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\alpha x' + 2\beta y' + f = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

gdje smo označili

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = V^T \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \cos \theta + e \sin \theta \\ -d \sin \theta + e \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Ako je matrica δ regularna, tj. ako su obje svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 različite od nule, tada se linearni članovi x' i y' u (2.17) mogu eliminirati translacijom ravnine definirane s

$$x'' = x' + \frac{\alpha}{\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{\beta}{\lambda_2}, \quad (2.19)$$

odnosno

$$x' = x'' - \frac{\alpha}{\lambda_1}, \quad y' = y'' - \frac{\beta}{\lambda_2}. \quad (2.20)$$

Pomoću (2.20), izraz (2.17) prelazi u

$$F(x, y) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0, \quad (2.21)$$

gdje smo označili

$$f' = f - \frac{\alpha^2}{\lambda_1} - \frac{\beta^2}{\lambda_2}. \quad (2.22)$$

Može se također pokazati da vrijedi relacija

$$f' = \frac{\det \Delta}{\det \delta}.$$

Ako je matrica δ singularna, onda je barem jedan od λ_i jednak nuli i translacija (2.19) ne postoji.

Ako je jedan i samo jedan od λ_i jednak nuli, tada postoji translacija ravnine kojom se može eliminirati jedan od linearnih članova u jednadžbi (2.17). Na primjer, neka je $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_2 = 0$. Translacija ravnine definirana s

$$x'' = x' + \frac{\alpha}{\lambda_1}, \quad y'' = y', \quad (2.23)$$

odnosno

$$x' = x'' - \frac{\alpha}{\lambda_1}, \quad y' = y'', \quad (2.24)$$

transformira jednadžbu (2.17) na oblik

$$\lambda_1 x''^2 + 2\beta y'' + f' = 0, \quad (2.25)$$

gdje je

$$f' = f - \frac{\alpha^2}{\lambda_1}. \quad (2.26)$$

Analogno, ako je $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 \neq 0$ tada translacija ravnine definirana s

$$x'' = x', \quad y'' = y' + \frac{\beta}{\lambda_2}, \quad (2.27)$$

odnosno

$$x' = x'', \quad y' = y'' - \frac{\beta}{\lambda_2}, \quad (2.28)$$

transformira jednadžbu (2.17) na oblik

$$\lambda_2 y''^2 + 2\alpha x'' + f' = 0, \quad (2.29)$$

gdje je

$$f' = f - \frac{\beta^2}{\lambda_2}. \quad (2.30)$$

Konačno, kad bi obje svojstvene vrijednosti bile jednake nuli, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, to bi značilo da je $a = b = c = 0$, a tada izraz (2.1) ne predstavlja koniku.

Iz provedene diskusije proizlazi da se konika prikazana jednadžbom (2.1) može klasificirati ispitivanjem svojstvenih vrijednosti matrice δ . Postoji devet klasa koni-

ka; tj. za zadane a, b, c, d, e i f , jednadžba (2.1) predstavlja jedan od devet tipova ravninskih krivulja koje nazivamo konikama. Dva tipa predstavljaju imaginarnu koniku, jer u tim slučajevima ne postoje realne točke koje bi zadovoljile jednadžbu (2.1).

3. KLASIFIKACIJA CENTRALNIH KONIKA

Ako su svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 različite od nule, tada označimo:

$$A = \sqrt{\left| \frac{f'}{\lambda_1} \right|}, \quad B = \sqrt{\left| \frac{f'}{\lambda_2} \right|}. \quad (3.1)$$

A i B nazivamo poluosima konike.

(i) Ako je $\text{sgn} \lambda_1 = \text{sgn} \lambda_2 = \text{sgn} f'$ i $f' \neq 0$, tada se (2.21) može napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{A^2} + \frac{y''^2}{B^2} = -1 \quad (3.2)$$

koji nazivamo jednadžbom imaginarne elipse s poluosima A i B .

(ii) Ako je $\text{sgn} \lambda_1 = \text{sgn} \lambda_2 \neq \text{sgn} f'$ i $f' \neq 0$, tada se (2.21) može napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{A^2} - \frac{y''^2}{B^2} = 1 \quad (3.3)$$

koji predstavlja jednadžbu realne elipse s poluosima A i B .

(iii) Ako je $\text{sgn} \lambda_1 = \text{sgn} \lambda_2$ i $f' = 0$, tada (2.21) prelazi u

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0, \quad (3.4)$$

što predstavlja jednadžbu para imaginarnih pravaca kroz točku $x'' = y'' = 0$.

(iv) Ako je $\text{sgn} \lambda_1 \neq \text{sgn} \lambda_2$ i $f' \neq 0$, tada se (2.21) može napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{A^2} - \frac{y''^2}{B^2} = 1 \text{ ako je } \frac{f'}{\lambda_1} < \frac{f'}{\lambda_2}, \quad (3.5)$$

odnosno

$$\frac{y''^2}{B^2} - \frac{x''^2}{A^2} = 1 \text{ ako je } \frac{f'}{\lambda_1} > \frac{f'}{\lambda_2}, \quad (3.6)$$

što je u oba slučaja hiperbola s poluosima A i B . Pravci $Ay'' - Bx'' = 0$, $Ay'' + Bx'' = 0$

nazivaju se asimptotama hiperbole.

(v) Ako je $\text{sgn} \lambda_1 \neq \text{sgn} \lambda_2$ i $f' = 0$, tada se (2.21) može napisati u obliku

$$\begin{aligned} & |\lambda_1 x''^2 - \lambda_2 y''^2| = \\ & = \left(\sqrt{|\lambda_1|} x'' - \sqrt{|\lambda_2|} y'' \right) \left(\sqrt{|\lambda_1|} x'' + \sqrt{|\lambda_2|} y'' \right) = 0, \quad (3.8) \end{aligned}$$

što predstavlja jednadžbu dvaju pravaca koji se sijeku u točki $x'' = y'' = 0$.

Ako je matrica δ regularna, $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, postoji geometrijsko središte konike i konika se naziva centralom konikom. Naime, lako se vidi da je takva konika centralno simetrična u odnosu na ishodište koordinatnog sustava x'', y'' koje nazivamo centrom ili središtem konike.

Osim središta elipse, postoje dvije karakteristične točke koje nazivamo žarištima ili fokusima, nalaze se na većoj poluosi, od središta elipse udaljene su za

$$C = \sqrt{|A^2 - B^2|} \quad (3.9)$$

i imaju koordinate:

$$\begin{aligned} x''_F &= \mp C, & y''_F &= 0 & \text{za } A &\geq B \\ x''_F &= 0, & y''_F &= \mp C & \text{za } A &\leq B. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Za hiperbolu žarišna je udaljenost

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (3.11)$$

i koordinate žarišta su:

$$\begin{aligned} x''_F &= \mp C, & y''_F &= 0 & \text{za } \frac{f'}{\lambda_1} < \frac{f'}{\lambda_2}, \\ x''_F &= 0, & y''_F &= \mp C & \text{za } \frac{f'}{\lambda_1} > \frac{f'}{\lambda_2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

4. KLASIFIKACIJA NECENTRALNIH KONIKA

Ako je matrica δ singularna, geometrijsko središte konike ne postoji, pa se pripadna konika naziva necentralnom. Ako je $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_2 = 0$, tada se jednadžba (2.1) može transformirati na oblik (2.25) i imamo sljedeće slučajeve:

(vi1) Ako je $\beta \neq 0$, onda je $\lambda_1 x''^2 + 2\beta y'' + f' = 0$ jednadžba parabole. Fokus te parabole je točka s koordinatama

$$x''_F = 0, \quad y''_F = -\frac{f'}{2\beta} - \frac{\beta}{2\lambda_1}. \quad (4.1)$$

(vii1) Ako je $\beta = 0$ i $\text{sgn}\lambda_1 \neq \text{sgn}f'$, tada se (2.25) može napisati u obliku

$$\begin{aligned} |\lambda_1 x''^2 - |f''|| &= \\ &= \left(\sqrt{|\lambda_1 x'' - \sqrt{|f''}|} \right) \left(\sqrt{|\lambda_1 x'' + \sqrt{|f''}|} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdje možemo prepoznati jednadžbu dvaju paralelnih pravaca.

(viii1) Ako je $\beta = 0$ i $\text{sgn}\lambda_1 = \text{sgn}f'$ tada imamo

$$\begin{aligned} |\lambda_1 x''^2 + |f''|| &= \\ &= \left(\sqrt{|\lambda_1 x'' - i\sqrt{|f''}|} \right) \left(\sqrt{|\lambda_1 x'' + i\sqrt{|f''}|} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

što je jednadžba dvaju imaginarnih paralelnih pravaca.

(ix1) Ako je $\beta = 0$ i $f' = 0$, tada (2.25) prelazi u

$$x''^2 = 0, \quad (4.4)$$

što možemo interpretirati kao jednadžbu dvostrukog pravca.

Ako je $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 \neq 0$, tada se jednadžba (2.1) može transformirati na oblik (2.29) i na analogan način zaključiti:

(vi2) $\alpha \neq 0$
parabola

(vii2) $\alpha = 0$ i $\text{sgn}\lambda_2 \neq \text{sgn}f'$
dva paralelna pravca

(viii2) $\alpha = 0$ i $\text{sgn}\lambda_2 = \text{sgn}f'$
dva imaginarna paralelna pravca
(ix2) $\alpha = 0$ i $f' = 0$
dvostruki pravac.

5. GRAFIČKI PRIKAZ CENTRALNIH KONIKA

Da bismo mogli vidjeti kakvu koniku za zadane a, b, c, d, e i f opisuje jednadžba (2.1), transformirali smo tu jednadžbu pomoću odgovarajuće rotacije i translacije u koordinatni sustav x'', y'' koji se naziva sustavom glavnih osi. Na taj smo način dobili jednadžbu konike u kanonskom obliku u koordinatnom sustavu glavnih osi. Ako želimo koniku grafički prikazati pomoću računala u polaznom koordinatnom sustavu x, y poželjno je u tom sustavu imati njenu jednadžbu u parametarskom obliku. Središte centralne konike je točka s koordinatama $x'' = 0$ i $y'' = 0$. Za svaku točku na osnovi relacija (2.16) i (2.20) vrijedi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x'' - \frac{\alpha}{\lambda_1} \\ y'' - \frac{\beta}{\lambda_2} \end{bmatrix},$$

te se za koordinate (x_s, y_s) središta konike u koordinatnom sustavu x, y može, koristeći (2.6) i (2.18), napisati

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} &= -V \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -V \Lambda^{-1} V^T \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = \\ &= -\delta^{-1} \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{bmatrix} be - cd \\ bd - ae \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dakle, koordinate (x_s, y_s) središta centralne konike moraju zadovoljavati sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

(i) Imaginarnu elipsu ne prikazujemo grafički, jer njenu jednadžbu ne zadovoljavaju koordinate niti jedne realne točke.

(ii) Poznato je da se jednadžba (realne) elipse iz kanonskog oblika (3.3) može prevesti u parametarski oblik na mnogo načina. Jedan od najjednostavnijih je:

$$x'' = A \cos t, \quad y'' = B \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.3)$$

Na osnovi formula (2.16), (2.20), (5.2) i (5.3) lako se dobiva parametarski oblik jednadžbi elipse u koordinatnom sustavu x, y :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \cos \theta & -B \sin \theta \\ A \sin \theta & B \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

U koordinatnom sustavu x, y koordinate fokusa elipse su:

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} \mp C \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad \text{za } A \geq B \quad (5.5)$$

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} \mp C \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{za } A \leq B$$

gdje je žarišna udaljenost C definirana s (3.9).

(iii) Točka s koordinatama $x'' = y'' = 0$ u koordinatnom sustavu x, y ima koordinate određene sustavom linearnih jednadžbi (5.2). To je jedina realna točka ove konike.

(iv) Poznato je da se jednadžba hiperbole iz kanonskog oblika (3.5) može prevesti u parametarski oblik na mnogo načina. Jedan od najjednostavnijih je:

$$x'' = \frac{A}{\cos t}, \quad y'' = B \operatorname{tg} t, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.6)$$

Na osnovi formula (2.16), (2.20), (5.2) i (5.6) lako se, uz pretpostavku

$$\frac{f'}{\lambda_1} < \frac{f'}{\lambda_2},$$

dobiva parametarski oblik jednadžbe hiperbole u koordinatnom sustavu x, y :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \cos \theta & -B \sin \theta \\ A \sin \theta & B \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\cos t \\ \operatorname{tg} t \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Ako je

$$\frac{f'}{\lambda_1} > \frac{f'}{\lambda_2},$$

tada na analogan način možemo dobiti

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \cos \theta & -B \sin \theta \\ A \sin \theta & B \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t \\ 1/\cos t \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

U koordinatnom sustavu x, y koordinate fokusa (x_F, y_F) hiperbole su:

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} \mp C \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad \text{za } \frac{f'}{\lambda_1} < \frac{f'}{\lambda_2} \quad (5.9)$$

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} \mp C \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{za } \frac{f'}{\lambda_1} > \frac{f'}{\lambda_2}.$$

Jednadžbe asimptota hiperbole (3.7) mogu se napisati u koordinatnom sustavu x, y u obliku:

$$\begin{aligned} &(\mp B \cos \theta - A \sin \theta)(x - x_S) + \\ &+ (\mp B \sin \theta + A \cos \theta)(y - y_S) = 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

odnosno u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} y &= y_S + (A \sin \theta \mp B \cos \theta) t \\ x &= x_S + (A \cos \theta \pm B \sin \theta) t, \quad t \in R. \end{aligned} \quad (5.11)$$

(v) Pravci (3.8) u koordinatnom sustavu x, y imaju jednadžbe u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} y &= y_S + (\sqrt{|\lambda_2|} \sin \theta \mp \sqrt{|\lambda_1|} \cos \theta) t \\ x &= x_S + (\sqrt{|\lambda_2|} \cos \theta \pm \sqrt{|\lambda_1|} \sin \theta) t, \quad t \in R. \end{aligned} \quad (5.12)$$

6. GRAFIČKI PRIKAZ NECENTRALNIH KONIKA

(vi1) Za $\beta \neq 0$ parabolu $\lambda_1 x''^2 + 2\beta y'' + f' = 0$ možemo parametrizirati, na primjer, na sljedeći način:

$$x'' = t, \quad y'' = -\frac{\lambda_1 t^2 + f'}{2\beta}, \quad t \in R. \quad (6.1)$$

Primjenom relacija (2.16), (2.24) i (6.1) možemo napisati jednadžbu parabole u koordinatnom sustavu x, y u parametarskom obliku:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cos \theta + \frac{t^2 \lambda_1 \sin \theta + f' \sin \theta}{2\beta} - \frac{\alpha \cos \theta}{\lambda_1} \\ t \sin \theta - \frac{t^2 \lambda_1 \cos \theta + f' \cos \theta}{2\beta} - \frac{\alpha \sin \theta}{\lambda_1} \end{bmatrix}, \quad t \in R. \quad (6.2)$$

Fokus te parabole je prema (4.1) u točki s koordinatama

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha \cos \theta}{\lambda_1} + \frac{f' \sin \theta}{2\beta} + \frac{\beta \sin \theta}{2\lambda_1} \\ -\frac{\alpha \sin \theta}{\lambda_1} - \frac{f' \cos \theta}{2\beta} - \frac{\beta \cos \theta}{2\lambda_1} \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

(vii1) Jednadžbe paralelnih pravaca (4.2) mogu se napisati u koordinatnom sustavu x, y u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} x &= \left(\mp \sqrt{\left| \frac{f'}{\lambda_1} \right|} - \frac{\alpha}{\lambda_1} \right) \cos \theta - t \sin \theta \\ y &= \left(\mp \sqrt{\left| \frac{f'}{\lambda_1} \right|} - \frac{\alpha}{\lambda_1} \right) \sin \theta + t \cos \theta, \quad t \in R. \end{aligned} \quad (6.4)$$

(viii1) Imaginarne pravce ne prikazujemo grafički.

(ix1) Jednadžba pravca $x'' = 0$ može se u parametarskom obliku u koordinatnom sustavu x, y napisati na primjer ovako:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\alpha}{\lambda_1} \cos \theta - t \sin \theta \\ y &= -\frac{\alpha}{\lambda_1} \sin \theta + t \cos \theta, \quad t \in R. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Grafički prikaz necentralnih konika za slučajeve (vi2) - (ix2) provodi se na potpuno analogan način.

7. PRIMJERI

U skladu s izvedenom klasifikacijom konika i opisanim postupcima u prethodnim poglavljima autori ovog članka sastavili su odgovarajući program u BASIC-u koji služi za dobivanje grafičkih prikaza bilo koje krivulje drugog reda na osnovi njene jednadžbe u općem obliku. Pomoću spomenutog programa riješeni su sljedeći primjeri. Pri tome je uočeno da se i u udžbenicima matematike ponekad mogu naći pogrešni crteži (Kaplan 1986., Kurepa 1990., Pavković i Veljan 1995.).

Primjer 1

Neka je zadana jednadžba

$$19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2 - 30\lambda + 200 = 0$$

i njena rješenja su $\lambda_1=20$, $\lambda_2=10$. Prema (2.13) imamo

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{3}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.22):

$$\alpha = \frac{60}{\sqrt{10}}, \quad \beta = -\sqrt{10}, \quad f' = 10.$$

Kako je $\operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \lambda_2 = \operatorname{sgn} f' \neq 0$, to zaključujemo da se radi o imaginarnoj elipsi. Njene poluosi su prema (3.1)

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad B = 1.$$

Primjer 2

Neka je zadana jednadžba

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$$

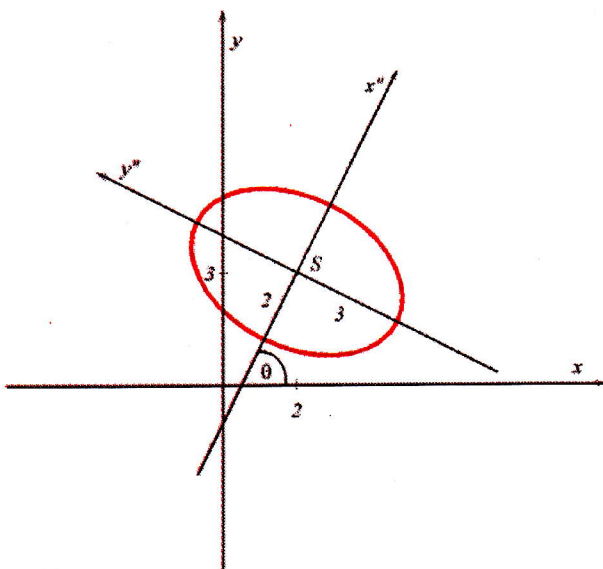
i njena rješenja su $\lambda_1=9$, $\lambda_2=4$. Prema (2.13) imamo:

$$\operatorname{tg} \theta = 2, \quad \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.22):

$$\alpha = -\frac{72}{\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad f' = -36.$$

Kako je $\operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \lambda_2 \neq \operatorname{sgn} f' \neq 0$, zaključujemo da se radi o realnoj elipsi. Njene su poluosi $A = 2$, $B = 3$, a središte u točki $S(2,3)$. Na slici 1 dan je grafički prikaz te elipse. Istu jednadžbu elipse razmatrao je i Kurepa (1990.), ali je njegov grafički prikaz pogrešan.



Slika 1

Primjer 3

Neka je zadana jednadžba

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$$

i njena rješenja su $\lambda_1=6$, $\lambda_2=4$. Prema (2.13) imamo:

$$\operatorname{tg} \theta = -1, \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.22):

$$\alpha = -6\sqrt{2}, \quad \beta = 4\sqrt{2}, \quad f' = 0.$$

Kako je $\operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \lambda_2$ i $f' = 0$, to zaključujemo da se radi o točki, a njene koordinate su $(0, -2)$. Zadana jednadžba može se prevesti na oblik:

$$3(x - y - 2)^2 + 2(x + y + 2)^2 = 0.$$

Primjer 4

Neka je zadana jednadžba

$$2x^2 + 10xy + 2y^2 + 9x + 12y - 2 = 0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0$$

i njena rješenja su $\lambda_1=7$, $\lambda_2=-3$. Prema (2.13) imamo:

$$\operatorname{tg} \theta = 1, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.22):

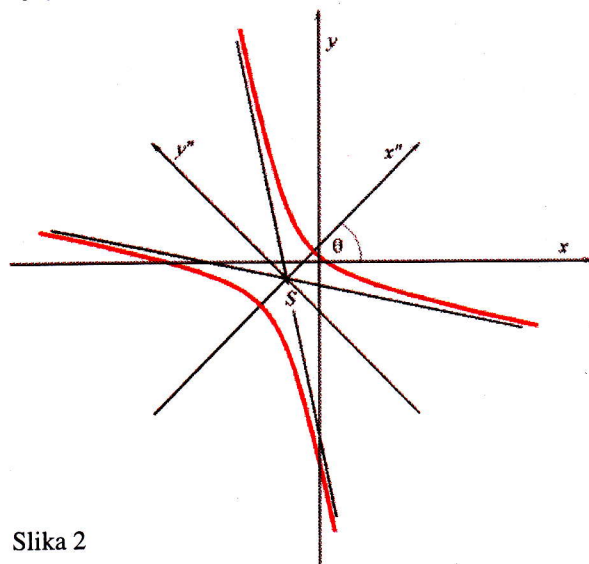
$$\alpha = \frac{21\sqrt{2}}{4}, \quad \beta = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad f' = -\frac{19}{2}.$$

Kako je $\operatorname{sgn} \lambda_1 \neq \operatorname{sgn} \lambda_2$ i $f' \neq 0$, to zaključujemo da se radi

o hiperboli. Njene poluosi su $A = \sqrt{\frac{19}{14}}$ i $B = \sqrt{\frac{19}{6}}$, a

središte u točki $S(-1, -1/2)$.

Na slici 2 dan je grafički prikaz te hiperbole. Istu jednadžbu hiperbole razmatrao je i Kaplan (1968.), ali je njegov grafički prikaz pogrešan.



Slika 2

Primjer 5

Neka je zadana jednačba

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0.$$

Pripadna karakteristična jednačba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$$

i njena rješenja su $\lambda_1=8$, $\lambda_2=-2$. Prema (2.13) imamo:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{3}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.22) imamo:

$$\alpha = \frac{48}{\sqrt{10}}, \quad \beta = \frac{4}{\sqrt{10}}, \quad f' = 0.$$

Kako je $\operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \lambda_2$ i $f' = 0$ to zaključujemo da se radi o dva pravca koji se sijeku u jednoj točki, a njene koordinate su $(-2, 0)$. Zadana se jednačba može prevesti u oblik:

$$(x + y + 2)(7x - y + 14) = 0.$$

Primjer 6

Neka je zadana jednačba $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0$.

Pripadna karakteristična jednačba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

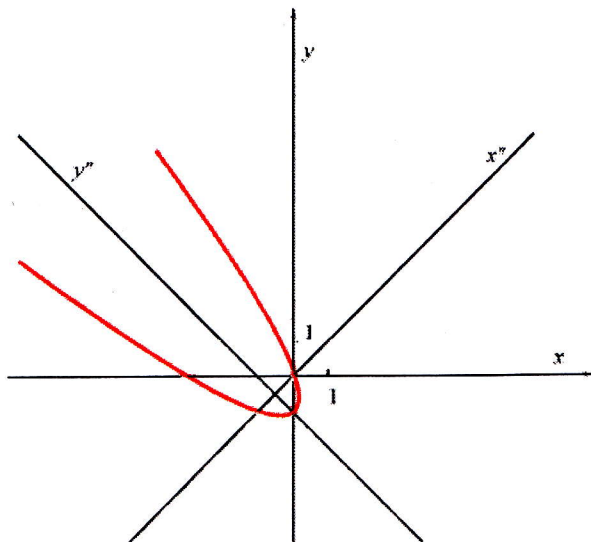
i njena rješenja su $\lambda_1=2$, $\lambda_2=0$. Prema (2.13) imamo:

$$\operatorname{tg} \theta = 1, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.26):

$$\alpha = \sqrt{2}, \quad \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f' = -1.$$

Kako je $\beta \neq 0$, to zaključujemo da se radi o paraboli. Na slici 3 dan je njen grafički prikaz. Istu jednačbu parabole razmatraju Pavković i Veljan (1995.), ali je njihov grafički prikaz pogrešan.



Slika 3

Primjer 7

Neka je zadana jednačba

$$x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0.$$

Pripadna karakteristična jednačba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

i njena rješenja su $\lambda_1=2$, $\lambda_2=0$. Prema (2.13) imamo:

$$\operatorname{tg} \theta = -1, \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.26):

$$\alpha = -6\sqrt{2}, \quad \beta = 0, \quad f' = -50.$$

Kako je $\beta=0$, $\operatorname{sgn} \lambda_1 \neq \operatorname{sgn} f'$ i $f' \neq 0$, to zaključujemo da se radi o dva paralelna pravca. Zadana jednačba može se napisati i u obliku:

$$(x - y + 5\sqrt{2} - 6)(x - y - 5\sqrt{2} - 6) = 0.$$

Primjer 8

Neka je zadana jednačba

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0.$$

Pripadna karakteristična jednačba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2 - 25\lambda = 0$$

i njena rješenja su $\lambda_1=25$, $\lambda_2=0$. Prema (2.13) imamo:

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{3}{4}, \quad \sin \theta = -\frac{3}{5}, \quad \cos \theta = \frac{4}{5}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.26):

$$\alpha = -100, \quad \beta = 0, \quad f' = 25.$$

Kako je $\beta=0$ i $\operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} f'$, to zaključujemo da se radi o dva paralelna imaginarna pravca.

Primjer 9

Neka je zadana jednačba

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0.$$

Pripadna karakteristična jednačba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2 - 13\lambda = 0$$

i njena rješenja su $\lambda_1=13$, $\lambda_2=0$. Prema (2.13) imamo:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{2}, \quad \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.26):

$$\alpha = -\sqrt{13}, \quad \beta = 0, \quad f' = 0.$$

Kako je $\beta=0$ i $f'=0$, zaključujemo da se radi o dvostrukom realnom pravcu. Zadana jednačba može se prevesti na oblik:

$$(2x + 3y - 1)^2 = 0.$$

LITERATURA

- ALEKSANDROV, P. S.: *Kurs analitičeskoj geometrii i linejnoj algebri*, Nauka, Moskva, 1979.
- BUGROV, Ja. S., NIKOL'SKIJ, S. M.: *Elementy linejnoj algebry i analitičeskoj geometrii*, Nauka, Moskva, 1984.
- IL'IN, V. A., POZNIJAK, E. G.: *Analitičeskaja geometrija*, Nauka, Moskva, 1981.
- JAVOR, P.: *Analitička geometrija ravnine*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- KAJGORODOV, V. R.: *Kurs analitičeskoj geometrii i linejnoj algebry*, Izdatel'stvo Kazanskogo Universiteta, 1985.
- KAPLAN, I. A.: *Praktičeskie zanjatija po vysšej matematike*, čast' V, Izdatel'stvo Har'kovskogo Universiteta, Har'kov, 1968.
- KRUTICKAJA, N. Č., ŠIŠKIN, A. A.: *Linejnaja algebra v voprosah i zadačah*, Vysšaja škola, Moskva, 1985.
- KUREPA, S.: *Uvod u linearnu algebru*, 6. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- MANTUROV, O. V., MATVEEV, N. M.: *Kurs vysšej matematiki*, Vysšaja škola, Moskva, 1986.
- MITRINOVIĆ, D. S., MIHAILOVIĆ, D., VASIĆ, P. M.: *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, Građevinska knjiga, Beograd, 1979.
- PAVKOVIĆ, B., VELJAN, D.: *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- PETTOFREZZO, A. J.: *Matrices and Transformations*, Dover Publications, Inc., New York, 1966.
- RAŠAJSKI, B.: *Analitička geometrija*, Građevinska knjiga, Beograd, 1983.

Mr. sc. Miljenko Lapaine i mr. sc. Damjan Jovičić
Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
10000 Zagreb, Kačićeva 26
tel.: 456-1-222,
faks: 445-410
e-mail: Miljenko.Lapaine@public.srce.hr

Generiranje glatkih funkcija na složenom području pomoću R-funkcija

Generating Smooth Functions on Compound Domain by R-functions

ABSTRACT

The analytical procedure for generating smooth functions on compound domain is described. This procedure is based on the R-function method developed by Ukrainian mathematician L. V. Rvačev. The R-functions are ordinary continuous functions of continuous variables, but the analogy with Boolean functions in mathematical logics makes their generating easier. In this paper the computer program for generating and drawing R-functions in central projection is presented. The program has been made in MATHEMATICA language. The application of program has been illustrated by several examples.

Key Words

R-functions, MATHEMATICA, Boolean functions

Generiranje glatkih funkcija na složenom području pomoću R-funkcija

SAŽETAK

Opisuje se analitički postupak za generiranje glatkih funkcija nad složenim područjem. Postupak se zasniva na metodi R-funkcija koju je razvio ukrajinski matematičar V. L. Rvačev. R-funkcije su obične neprekidne funkcije neprekidnih varijabli, ali su analogne Booleovim funkcijama u matematičkoj logici, čime je olakšano njihovo generiranje. Također je pokazan program za elektroničko računalo, napisan u jeziku MATHEMATICA, za generiranje i crtanje R-funkcija u perspektivi. Upotreba programa prikazuje se na nekoliko primjera.

Ključne riječi

R-funkcije, MATHEMATICA, Booleove funkcije

UVOD

Često je u primjenama potrebno "napuhati" glatku funkciju nad složenim područjem. Primjer je definiranje koordinatnih funkcija za Ritzovu metodu.

Taj se problem može lako riješiti numeričkim metodama, pa se najčešće tako i postupa. U ovom se članku opisuje vrlo jednostavan, zanimljiv i djelotvoran analitički postupak čiji je autor ukrajinski matematičar V. L. Rvačev. Također je uvršten program za elektroničko računalo, koji ilustrira visoku djelotvornost jezika MA-

THEMATICA u rješavanju sličnih problema.

FORMULACIJA PROBLEMA

Zadano je dvodimenzionalno područje omeđeno dijelovima analitički definiranih glatkih krivulja. Treba generirati plohu (funkciju $\omega(x,y)$) koja zadovoljava sljedeće uvjete:

1. *Derivabilna je na cijelom području.*

Funkcija i njezine derivacije su neprekidne i konačne (osim u okolinama singularnih točaka - lomova konture itd.).

2. *Unutar područja su vrijednosti funkcije pozitivne, a izvan područja negativne.*¹

3. *Vrijednost funkcije na rubu jednaka je nuli.*

R-FUNKCIJE

Očigledno je da opisani problem ima u svakom konkretnom slučaju beskonačno mnogo rješenja. Obično je dovoljno odrediti jedno od njih.

Sljedeći postupak razvio je V. L. Rvačev i nazvao ga metodom R-funkcija.

R-funkcije su obične neprekidne funkcije, neprekidnih argumenata, ali su po nekim svojstvima analogne funkcijama Booleove algebre. Svojstvu istinitosti iz Booleove algebre pridruženo je svojstvo pozitivnosti R-funkcije $f > 0$, dok je neistinitosti pridruženo svojstvo negativnosti R-funkcije $f < 0$.²

Proizvoljna funkcija koja zadovoljava navedene uvjete je po definiciji R-funkcija.

Mnoge su jednostavne funkcije R-funkcije. Na primjer, funkcija $\omega(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ je R-funkcija nad jediničnim krugom. Očigledno, ako se točka (x,y) nalazi unutar jediničnog kruga, vrijednost funkcije $\omega(x,y)$ je pozitivna. Ako se točka nalazi na kružnici, vrijednost je funkcije jednaka nuli, a ako pada izvan kruga, vrijednost funkcije je negativna.

Složenije R-funkcije dobivaju se iz jednostavnijih pomoću sljedećih R-operacija:

1. **R-negacija** (oznaka $\neg p$)

$\neg p$

Kako je spomenuto, pozitivnost R-funkcije pridružena je istinitosti odgovarajuće Booleove funkcije. Razum-

¹ U mnogim se primjenama ovaj uvjet može ublažiti, ako nije važno kakve su vrijednosti funkcije izvan područja

² Nejasno je koju vrijednost istinitosti treba pridružiti točkama ravnine u kojima je vrijednost funkcije jednaka nuli. Sam je autor Rvačev pridružio True, ali to vodi u kontradikciju: R-negacija od vrijednosti 0 je također jednaka nuli što je onda opet True, a po definiciji negacije trebalo bi biti False. Najispravnije je reći da je u točkama u kojima je vrijednost funkcije jednaka nuli pripadna vrijednost istinitosti nedefinirana.

ljivo je da zbog toga promjena predznaka R-funkcije odgovara logičkoj negaciji.

2. R-konjunkcija (oznaka $p \wedge q$)

$$p + q - \sqrt{p^2 + q^2 + 2\alpha pq}$$

3. R-disjunkcija (oznaka $p \vee q$)

$$p + q + \sqrt{p^2 + q^2 + 2\alpha pq}$$

α je konstanta koja mora zadovoljavati uvjet: $-1 < \alpha < 1$.³ (U priloženom je programu, kao najjednostavnije, odabrano $\alpha = 0$.)

4. R-ekvivalencija (oznaka $p \approx q$)

$$pq$$

R-operacija koja odgovara ekvivalenciji je obično množenje funkcija! U Booleovoj algebri dvije funkcije p i q su ekvivalentne ako imaju istu vrijednost istinitosti (ako su obje istinite ili obje lažne), što je pridruženo svojstvu operacije množenja: produkt p i q je pozitivan ako su obje funkcije istog predznaka (ako su obje funkcije "istinite" ili obje "lažne" u smislu R-funkcija).

Posebna R-operacija ekvivalencije mogla bi se izostaviti jer se može izraziti pomoću ostalih operacija: konjunkcije, disjunkcije i negacije. (Rvačev je nije ni definirao.) Ipak, upotrebom R-ekvivalencije najčešće se dobivaju mnogo jednostavniji izrazi.

Analogija između Booleovih i R-operacija može se neposredno provjeriti (>0 se interpretira kao True, <0 kao False, a $=0$ kao nedefinirana vrijednost istinitosti):

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \approx q$
<0	<0	>0	<0	<0	>0
<0	$=0$	>0	<0	$=0$	$=0$
<0	>0	>0	<0	>0	<0
$=0$	<0	$=0$	<0	$=0$	$=0$
$=0$	$=0$	$=0$	$=0$	$=0$	$=0$
$=0$	>0	$=0$	$=0$	>0	$=0$
>0	<0	<0	<0	>0	<0
>0	$=0$	<0	$=0$	>0	$=0$
>0	>0	<0	>0	>0	>0

Napominje se da postoje i druge funkcije za operacije konjunkcije i disjunkcije, koje se ponašaju analogno Booleovim funkcijama (one se također zovu R-funkcije).

PROGRAM ZA R-FUNKCIJE U JEZIKU MATHEMATICA

U jeziku MATHEMATICA oznaka za logičku negaciju funkcije p je $!p$, za konjunkciju dviju funkcija p i q , $p \& \& q$, a za disjunkciju istih funkcija $p \mid \mid q$. Zbog preglednosti iste su oznake upotrebljene i u programu za R-funkcije. Za ekvivalenciju nije upotrijebljena posebna oznaka nego je zadržana standardna oznaka za množe-

nje (razmak ili znak $*$). Program je koncipiran rekurzivno. Time se omogućuje da jednostavnije funkcije služe za generiranje složenijih. Naredba broj 5 služi da se prekine rekurzija jer odsustvo oznaka $!$, $*$, $\&\&$ i $\mid \mid$ znači da funkciju ne treba dalje raščlanjivati. Ostale naredbe definiraju generiranje složenijih R-funkcija iz jednostavnijih, prema formulama za R-operacije.

```
1 R[!p_]:=R[p] negacija
2 R[p_*q_]:=R[p]*R[q] ekvivalencija
3 R[(p_)&&(q_)]:=R[p]+R[q]-Sqrt[R[p]^2+R[q]^2] konjunkcija
4 R[(p_)|| (q_)]:= R[p]+R[q]+Sqrt[R[p]^2+R[q]^2] disjunkcija
5 R[p_]:=p
```

Programu još treba dodati naredbu `Rplot` za 3D crtanje R-funkcija dobivenu uz pomoć postojeće naredbe `Plot3D` za crtanje ploha u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Pozivom naredbe crtaju se tri slike: prva je generirana ploha definirana R-operacijama, druga dio horizontalne ravnine, a treća kombinirana slika kojom se ponovo prikazuje generirana ploha, ali prerezana horizontalnom ravninom $z = 0$. U naredbi `Rplot` mogu se upotrijebiti opcije naredbe `Plot3D`.

```
6 Rplot[f_,mx_,my_,opts_ _ _]:=
Module[{p1,p2},
p1=Plot3D[R[f],mx,my,opts];
p2=Plot3D[0,mx,my,PlotPoints->2,opts];
Show[p1, p2]]
```

Kako se vidi, program je vrlo kratak. Pokušajte zamisliti duljinu i složenost ekvivalentnog programa u nekom drugom programskom jeziku!

PRIMJERI

Primjer 1

Unija dvaju krugova

Zadana su dva kruga polumjera $r = 2.0$ sa središtima u točkama s koordinatama $(1.5, 0.0)$ i $(-1.5, 0.0)$.

Odgovarajuće se funkcije, prema sintaksi jezika MATHEMATICA, pišu:

$$S1=4-(x-1.5)^2-y^2$$

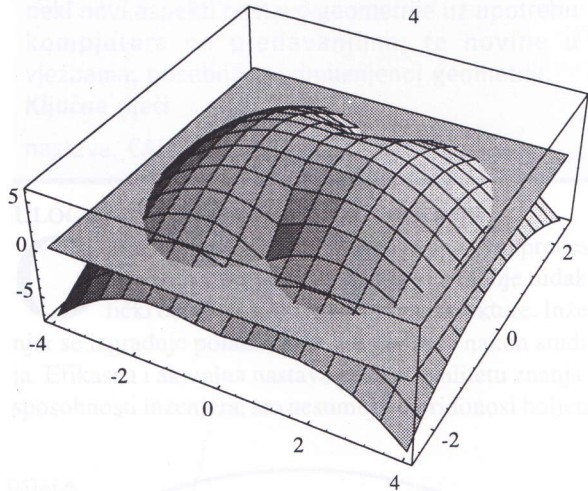
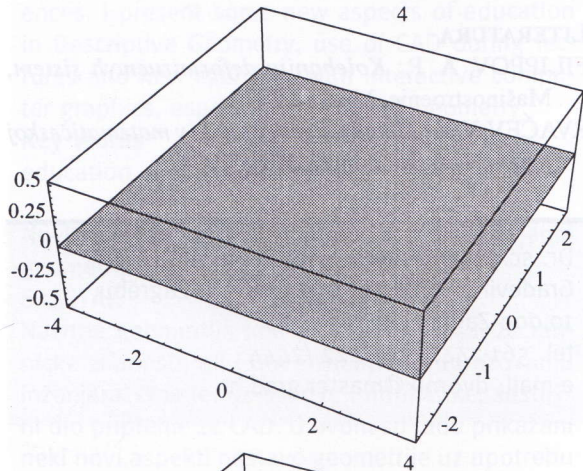
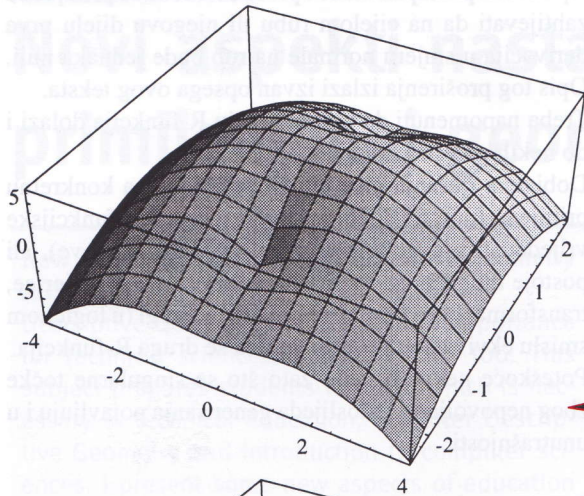
$$S2=4-(x+1.5)^2-y^2$$

Vrijednost funkcije $S1$ je pozitivna ("istinita") unutar prvog kruga, a $S2$ unutar drugoga. Funkcija $\omega(x,y)$ na složenom području, uniji oba kruga, definirana je pomoću R-disjunkcije. U sjecištima osnovnih kružnica su konkavni lomovi konture. To su singularne točke u kojima su prve derivacije neodređeni izrazi $0/0$, a druge derivacije teže u beskonačnost.

U opisanom programu i jeziku MATHEMATICA generiranje i crtanje funkcije $\omega(x,y)$ postiže se naredbom:

³ Kad bi konstanta α poprimila vrijednost 1 ili -1, izraz pod drugim korjenom bi postao potpuni kvadrat, što bi dovelo do degeneracije izraza za R-operacije.

```
Rplot[S1||S2,{x,-4,4},{y,-2.5,2.5}]
```



Ako se slika želi modificirati tako da se izmijeni gustoća mreže, izostave negativni dijelove plohe i graduirani bridovi kvadra unutar kojeg je ploha smještena te promijene točka motrišta i boja, to se postiže dodavanjem odgovarajućih opcija naredbi za crtanje:

```
Rplot[S1||S2,{x,-4,4},{y,-2.5,2.5},
PlotPoints->31,PlotRange->{0,7},
Boxed->False,Axes->False,Ticks->None,
ViewPoint->{2,-3,0.5},ColorOutput->M]
```



Primjer 2

3/4 kruga

$S1=x$

(poluravnina $x > 0$)

$S2=y$

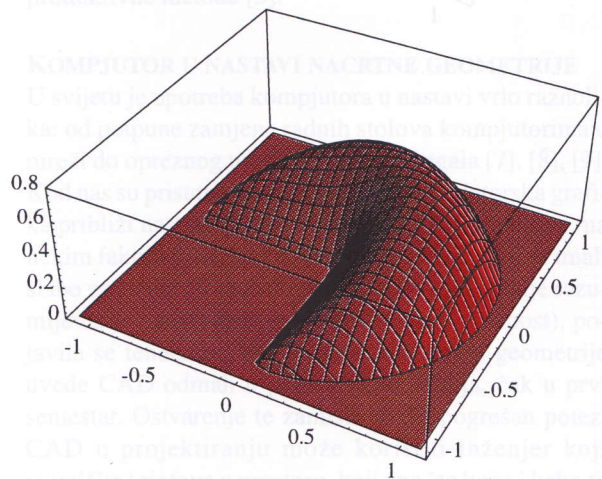
(poluravnina $y > 0$)

$S3=1-x^2-y^2$

(jedinični krug sa središtem u ishodištu)

Naredbom $S4=R[S1||S2]$ definira se zatim 3/4 ravnine, a konačno rješenje zadatka je $S5=S4\&\&S3$ ili, bez upotrebe pomoćnih varijabli, $S5=(x||y)\&\&(1-x^2-y^2)$.

Detalji naredbe za crtanje neće se više ponavljati.



Primjer 3

Područje oblika "gljive"

Osnovne funkcije su:

$$S1=1/4-x^2$$

(beskonačna vrpca među pravcima $x = -1/2, x = 1/2$)

$$S2=1-y$$

(poluravnina ispod pravca $y = 1$)

$$S3=-y$$

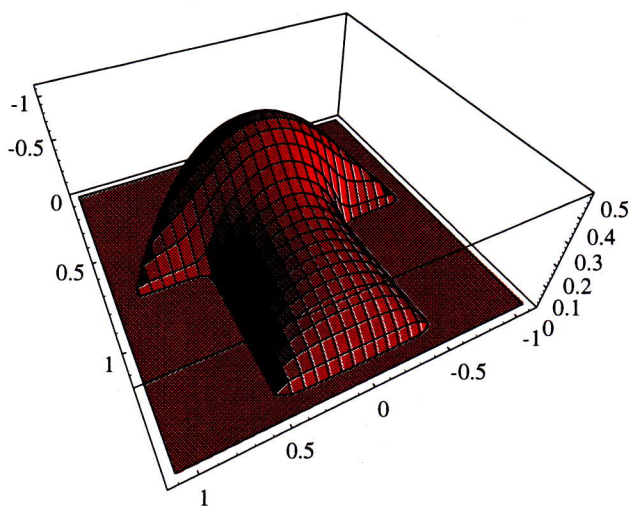
(poluravnina ispod pravca $y = 0$)

$$S4=y-x^2+1$$

(područje unutar parabole $y = x^2-1$)

R-funkcija nad "gljivastim" područjem:

$$S5=[(S1 \& S2) \mid \mid S3] \& S4$$

**ZAKLJUČNE NAPOMENE**

Opisani se postupak može i proširiti. Može se primjerice zahtijevati da na cijelom rubu ili njegovu dijelu prva derivacija u smjeru normale na rub bude jednaka nuli.

Opis tog proširenja izlazi izvan opsega ovog teksta.

Treba napomenuti da u generiranju R-funkcija dolazi i do nekih poteškoća:

Dobivena rješenja nisu uvijek prikladna za konkretnu primjenu (npr. na dijelu područja mogu biti funkcijske vrijednosti prevelike u odnosu na ostale dijelove), ali postoje mogućnosti različitih modifikacija. Primjerice, transformacijom Booleove funkcije u drugi (u logičkom smislu ekvivalentni) oblik dobiva se druga R-funkcija. Poteškoće nekad nastaju zato što se singularne točke zbog nepovoljnog redoslijeda generiranja pojavljuju i u unutrašnjosti.

LITERATURA

FILIPPOV, A. P.: *Kolebanja deformiranih sistema*, Mašinstvo, Moskva, 1970.

RVAČEV, V. L.: *Metody algebr logiki v matematičkoj fizike*, Naukova dumka, Kiev, 1974.

Dr. sc. Josip Dvornik, dipl. ing. građ.
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
10.000 Zagreb, Kačićeva 26
tel. 561-244, 4561-222 /2444
e-mail: dvornik@master.grad.hr

Novi aspekti nastave u nacrtnoj i primijenjenoj geometriji

New Aspect of Education in Descriptive Geometry ABSTRACT

Descriptive Geometry still has its old importance for technical sciences, and new aims too. This subject prepares students for CAD, which is necessary in technical education, but after Descriptive Geometry and Introduction to computer sciences. I present some new aspects of education in Descriptive Geometry, use of CAD during lectures and new exercises with interactive computer graphics, especially in Applied Geometry.

Key Words

education, CAD, geometry

Novi aspekti nastave u nacrtnoj i primijenjenoj geometriji

SAŽETAK

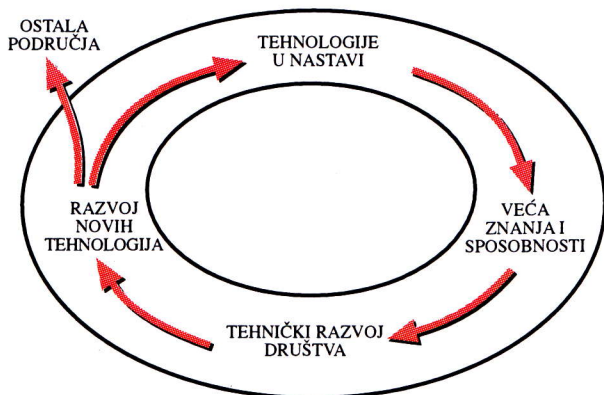
Nacrtna geometrija ima svoj raniji značaj za tehničke znanosti, ali i nove zadatke u obrazovanju inženjera. Ona je, uz osnove informatike, sastavni dio pripreme za CAD. U ovom su radu prikazani neki novi aspekti nastave geometrije uz upotrebu kompjutera na predavanjima, te novine u vježbama, posebno u primijenjenoj geometriji.

Ključne riječi

nastava, CAD, geometrija

ULOGA NASTAVE NACRTNE GEOMETRIJE

Obrazovanje inženjera složen je nastavni proces, na višim stupnjevima studija sve manje didaktički oblikovan, no iste osnovne strukture. Inženjer se izgrađuje polako, kroz niz godina i nakon studija. Efikasna i aktualna nastava podiže kvalitetu znanja i sposobnosti inženjera, što nesumnjivo pridonosi boljem



Slika 1

tehničkom razvoju društva i, uz ostalo, razvoju novih tehnologija u svim područjima primjene, pa i u nastavi. Krug se zatvara i ponavlja (slika 1).

Među zadacima nacrtne geometrije na prvom je mjestu (danas kao i prije 200 godina) razvoj prostornog zora i rješavanje zadataka u tri dimenzije [7], [8], [9]. Prikazivanje prostora u projekcijama (ortogonalnim, kosim, centralnim) i neke konstrukcije pripadaju osnovama tehničke kulture inženjera. To je pokazalo i istraživanje koje sam 1990. godine provela među šezdesetak nastavnika i inženjera na nekoliko građevinskih fakulteta i instituta [4]. Danas je, međutim, uz ove ciljeve i zadatke nacrtne geometrija dobila i nove — osposobljavanje za CAD (Computer Aided Design), i razumijevanje CAD-a. Spomenuto istraživanje pokazalo je da čak 80 % anketiranih smatra neophodnim uvođenje kompjutorske grafike, premda se većina od njih nije služila kompjutorom.

Budući korisnici kompjutorske geometrijske grafike, a pogotovo kreatori-eksperti, trebaju nacrtnu geometriju ali i analitičku, diferencijalnu, algebarsku itd. Geometrija i grafika postale su partneri i samo zajedno one nude produktivne metode [3].

KOMPJUTOR U NASTAVI NACRTNE GEOMETRIJE

U svijetu je upotreba kompjutera u nastavi vrlo raznolika: od potpune zamjene radnih stolova kompjutorima u mreži do opreznog uvođenja kao pomagala [7], [8], [9]. Kod nas su prisutna nastojanja da se kompjutorska grafika približi nastavi geometrije [1], [5], [6]. Međutim, na nekim fakultetima, kod nas i u inozemstvu, koji su imali slabo zastupljenu nacrtnu geometriju (i još slabije razumijevanje rukovodeće strukture za njenu važnost), pojavila se tendencija da se umjesto Nacrtne geometrije uvede CAD odmah u prvu godinu studija, čak u prvi semestar. Ostvarenje te zamisli bio bi pogrešan potez. CAD u projektiranju može koristiti inženjer koji razmišlja i rješava u prostoru, koji zna što hoće i kako to može dobiti. Kompjutor ne može zamijeniti inženjersko razmišljanje. Zašto se to ipak događa? Dio razloga otkrivaju sljedeća zapažanja:

- U okviru spomenutog istraživanja, 66 % ispitanih inženjera smatra nacrtnu geometriju tehničkom disciplinom.
- Neki inženjeri poistovjećuju nacrtnu geometriju s ručnim crtanjem pa misle da im više ne treba.
- Inženjeri koji nisu dovoljno razvili sposobnost prostorne percepcije traže spas u CAD-u i pouzdaju se u sliku koju dobiju, bez kritičke provjere.

Ovakve bi tendencije valjalo spriječiti boljim obrazovanjem u nacrtnoj geometriji kako bi budući inženjeri uočili činjenicu da je grafička realizacija rješenja samo način prikazivanja. To se, uz ostalo, može postići i pomoću kompjutera.

Nastavnik koristi kompjutor uglavnom na tri načina:

- da olakša neki posao,
- kao nastavno pomagalo u dinamičkoj vizualizaciji nastavne građe,
- da upozna studente s primjenom programskih paketa u inženjerskoj praksi.

Da bi se kompjutor mogao koristiti pri učenju potreban je odgovarajući softver. Obrazovni softver mora omogućavati laku komunikaciju s korisnikom. Izgled ekrana mora biti što jednostavniji, s minimumom izbornika. Kako je za jednoznačno određenje trodimenzionalnog objekta potrebno zadati par pridruženih projekcija, a za jasniju sliku prostora služe aksonometrija i perspektiva, moraju se na ekranu simultano prikazivati barem tri projekcije.

Profesionalni programski CAD paketi (poput AutoCAD-a) nisu prikladni za ovu namjenu, kako zbog svoje složenosti tako i zbog činjenice da sve navedene zahtjeve treba dodatno rješavati. Na tržištu profesionalno izrađenog softvera ne može se nabaviti nijedan specijaliziran za nastavu nacrtne geometrije. Za ovaj kolegij nastavnici moraju sami raditi na izradi programa [2]. U tom smislu veliku ulogu ima suradnja između nastavnika, potaknuta međunarodnim znanstvenim skupovima.

CAD U NASTAVI NACRTNE GEOMETRIJE

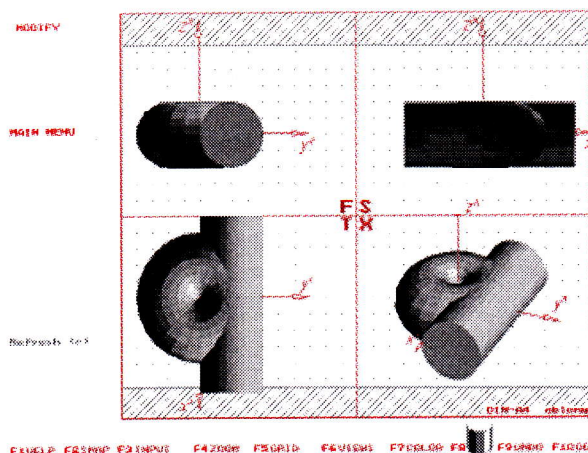
Budući će se inženjeri neizbježno susresti s nekim oblikom CAD-a (kao što se većina starijih inženjera već odavno susrela).

CAD je izrastao na geometrijskim disciplinama, isprepleten je geometrijom, a i komuniciranje s programom zahtijeva neka geometrijska znanja. Optimalan je način uvođenja u CAD njegovo postupno svladavanje: preko tehničkog crtanja, EOP-a, kroz Nacrtnu geometriju s prvim iskustvima u jednostavnom "školskom" CAD-u, u okviru Primijenjene geometrije uz okus prvog profesionalnog CAD-a, uz matematiku i druge discipline sve do diplomskog rada, u potpunosti izrađenog na kompjutoru (što naši studenti rade). Pri ovakvom prirodnom savladavanju CAD-a neće doći do otpora koji se javlja kad od nule treba naučiti golem i sofisticiran programski paket. Poznaju li se logika i osnovne zakonitosti CAD-a, lako se uče novi, slični programi.

Programske pakete CAD može se podijeliti u dvije grupe:

- jednostavne CAD programe koncipirane za nastavu, i
 - profesionalne CAD pakete (AutoCAD, Microstation, MegaCAD...) koje će budući inženjeri koristiti u praksi.
- U grupu jednostavnih CAD programa spadaju didaktički programi CADDG i CAD3D koji su izrađeni na Institutu za geometriju Tehničkog sveučilišta u Beču pod

vodstvom prof. dr. H. Stachela. To je prvonagrađeni rad na njemačko-austrijskom natjecanju 1993. godine [10], [11]. Ovaj program ima grafički ekran već podijeljen u četiri dijela za tri ortogonalne projekcije i aksonometriju. Sve radnje, od prihvaćanja podataka do obrade, program obavlja u trodimenzionalnom prostoru i prikazuje istovremeno u svim projekcijama (slika 2).



Slika 2

O NASTAVI NACRTNE I PRIMIJENJENE GEOMETRIJE NA GRAĐEVINSKOM FAKULTETU U RIJECI

U nastavi Nacrtne i Primijenjene geometrije na Građevinskom fakultetu u Rijeci (na VI. i VII. stupnju) svake se godine uvodi ponešto novoga. Koristi se sve šira lepeza nastavnih metoda, sredstava i pomagala, a od ove je školske godine nastavni program obuhvatio i neke nove teme potrebne za kompjutorsku grafiku (osnove perspektive, osnove kompjutorske grafike, geometrijske transformacije, uvod u CAD).

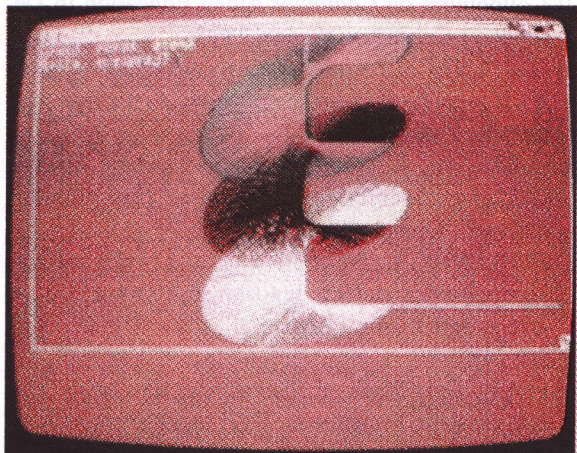
Osim preporučene klasične literature (11 domaćih i stranih knjiga), studentima se (već niz godina) dijele separati za svako nastavno poglavlje uz preporuku da ih prouče odmah nakon predavanja, prije vježbi. Prošle je godine u upotrebu ušla i nova, jako dobra metodička zbirka zadataka "Konstruktivna geometrija" (Babić, Gorjanc, Szivovicza, Sliepčević).

Nova nastavna poglavlja redovita su prilika za geometrijski pogled na gotove objekte iz inženjerske prakse, za "ekskurziju" putem videomaterijala. Videosnimke obrađuju geometrijske teme poput predavanja na terenu. Ističe se geometrija objekta i uočava geometrijski problem za koji treba dati rješenje. Neke od njih studenti rješavaju na vježbama. Gotovo čitavo gradivo Nacrtne i Primijenjene geometrije može se ilustrirati primjerima iz prakse. Da bi takav primjer postao zadatak, didaktički ga se oblikuje, npr. u obliku programiranih sekvenci na grafo-folijama za projiciranje.

Kompjutor kao pomagalo

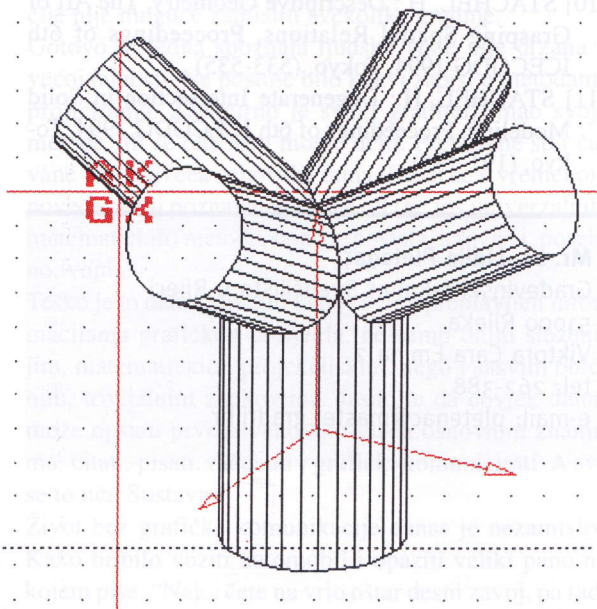
U nastavi Primijenjene geometrije još od 1988. godine koristim kompjutorski program (izrađen za Commodore Amigu 500) za poglavlje "plohe" [5]. Pomoću njega na predavanjima se dinamički vizualizira nastanak neke

plohe (slika 3), a na vježbama svaki student može provjeriti rješenje svog zadatka. Bira se vrsta plohe, točka se zadaje s tri koordinate, a na ekranu se promatra dinamičko nastajanje plohe (kosa projekcija). Odabirom ravnine projekcije dobiva se nacrt, tlocrt ili bokocrt u kosoj projekciji. Program je prezentiran na međunarodnom skupu geometričara (Plitvice 1988. godine).



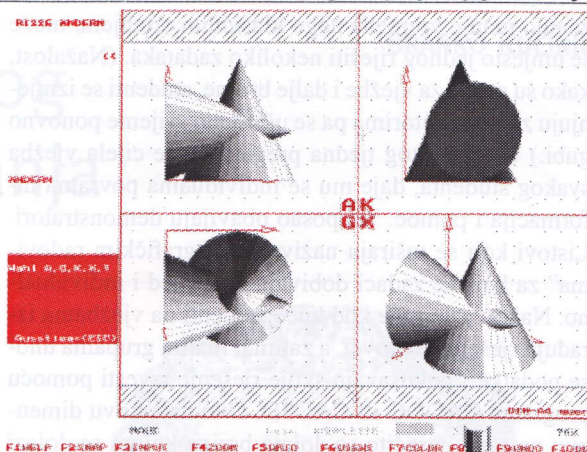
Slika 3

Na skupu u Beču 1992. godine prezentirane su test-verzije programa CAD3D i CADDG za nacrtnu geometriju. Tom sam ih prilikom dobila i upotrebljavam ih u nastavi od 1993. godine. U Nacrtnoj geometriji koristim oba programa, a u Primijenjenoj AutoCAD i CAD3D, koji omogućava modeliranje geometrijskih objekata u 3D prostoru kao i neke obrade: presjeci, prodori, vidljivost, konture, prodorne krivulje. (slika 4 i slika 5)



Slika 4

Prikazi su brzi i lijepi, u boji ili u nijansama osvjetljenja. Boja pridonosi jasnoći i izražajnosti. Studenti su jako dobro primili novost, a od prošle školske godine programe mogu koristiti u kompjutorskoj učionici i kod kuće.



Slika 5

Za vizualizaciju izvođenja pravčastih i drugih ploha koristim neke mogućnosti AutoCAD-a (EDGESURF, REVSURF, RULESURF, TABSURF).

Zbog neopremljenosti našeg fakulteta kao i zbog velikog broja studenata, vizualizacije na kompjutoru u sklopu predavanja moraju biti kratke i organizirane u grupama. Na vježbama, međutim, studentima je omogućeno kompjutorsko rješavanje zadataka (rezervirala sam kompjutorsku učionicu u vrijeme vježbi). Grafička realizacija rješenja može se obaviti klasično ili uz pomoć kompjutora (kad trebamo brzinu, dinamičnu sliku itd.). Primjena ovog CAD programa, specijaliziranog za nastavu nacrtne geometrije, jednostavnog za pristup (studentima ne treba ni sat vremena da ga upoznaju), pokazala je niz prednosti:

- Obogaćuje, olakšava i individualizira nastavu.
- To je interaktivna grafika koja omogućava izravan unos 3D podataka i automatski generira projekcije. (slika 5)
- Studenti lakše uče prikazivati trodimenzionalni prostor u pridruženim projekcijama i iz projekcija stvarati sliku u prostoru.
- Studenti imaju inicijativu, razmišljaju samo o geometriji i dobivaju novu slobodu rada s prostornim objektima.
- Zahvaljujući brzini povećava se interes, motiviranost i kreativnost pri rješavanju zadataka.
- Stežu se prva iskustva s CAD-om koja su dragocjena u kasnijem učenju nekog kompliciranog poslovnog CAD paketa.

Novosti u vježbama

Vježbe, u kontinuitetu s predavanjima, radnog su karaktera (konstrukcijske). Tiskani zadaci za svaku vježbu dijele se nakon svakog predavanja kako bi se studenti pripremili i naveli da prouče literaturu i separate. Od studenata se traži da aktivno dođu do rješenja. Vježba je metodički koncipirana i sadrži zadatke za izradu na vježbama, one programiranog tipa za samostalno učenje i neriješene zadatke za provjeru kod kuće. Kako za konstruktivni dio rješavanja zadatka na kompjutoru treba

znatno manje vremena nego klasičnim crtanjem, može se umjesto jednog riješiti nekoliko zadataka. (Nažalost, kako su grupe za vježbe i dalje brojne, studenti se izmjenjuju za kompjutorima pa se uštedeno vrijeme ponovno gubi.) U toku istog tjedna pregledava se cijela vježba svakog studenta, daje mu se individualna povratna informacija i pomoć. Taj posao obavljaju demonstratori. Listovi koji se tuširaju nazivaju se "grafičkim radovima" za koje se zadaci dobivaju unaprijed i individualno. Nakon pripreme kod kuće studenti na vježbama izrađuju rješenja u olovci, a zatim u malim grupama unose podatke i pokušavaju svoje rješenje izvesti pomoću programa CADDG ili CAD3D. Ovo daje novu dimenziju nastavi, naročito se doima brzina kojom se dolazi do grafičkog rješenja. Kako su izbornici na njemačkom jeziku, studenti dobivaju tiskanu shemu izbornika i podizbornika s prijevodom.

Studenti pri obrazlaganju svojih radova izlažu na ploči tiskane slike kompjutorskih rješenja: kao žičani model, s riješenom vidljivosti, osjenčano, uklonjen jedan dio itd. Ovim postupkom cijela grupa dobiva uvid u sve zadatke.

Prilikom ocjenjivanja vrednuju se sve vježbe iz nekog poglavlja, usmena obrana tuširanog rada pred cijelom grupom i sam rad. Poželjno je da nastavnik koji koncipira cjelokupnu nastavu vodi izradu individualnih radova, kompjutorsku obradu vježbi, rekapitulaciju i ocjenjivanje. U klasičnim dijelovima vježbi poželjni su mlađi suradnici.

Anonimna anketa provedena među studentima u dvije protekle školske godine nakon prvog semestra pokazala je da uz ovako koncipiranu nastavu čak 93% studenata radi i samostalno u toku semestra (13% intenzivno, a 80% povremeno). Zanimljivo je da nitko ne daje nekom drugom da mu naknadno izradi vježbu.

Na našem je fakultetu novost da se ispit može polagati parcijalno, kroz kolokvije. U školskoj godini 1995./1996. na I. kolokviju, koji obuhvaća temeljna znanja iz Nacrtna geometrije do uključivo geometrijskih tijela u općem položaju, odziv studenata bio je izuzetno velik. Kolokviju je pristupilo 78 studenata, od ukupno 91 koliko ih stvarno studira na VII. stupnju (bez ponavljača). Bio je 31 pozitivno riješen rad. Drugi kolokvij položila je većina studenata koji su položili i prvi. Tako je usmeni dio ispita, već prije ispitnih rokova, položilo 26,4 % studenata. Postignute ocjene su: izvrstan 29,2 %, vrlo dobar 25 %, dobar 29,2 % i dovoljan 16,6 %. Od ukupnog broja studenata koju su polagali putem kolokvija, njih 20 % nije uspjelo položiti ovaj ispit.

ZAKLJUČAK

Nacrtna geometrija ima i imat će ulogu u razvoju tehnike. Stoga ovaj kolegij mora imati puno sluha za buduće potrebe inženjera i s njima usklađivati nastavne sadržaje. Studente valja naučiti misliti u trodimenzionalnom prostoru, dati im priliku da riješe velik broj zadataka (idejno i grafički) te im omogućiti da crteže izrađuju i pomoću kompjutora. Treba nastojati da veći broj zadataka

taka bude povezan s inženjerskom praksom te da student bude što aktivniji sudionik nastavnog procesa.

LITERATURA

- [1] BOŽIKOV, Z.: Neki geometrijski zadaci u kompjutorskoj grafici, izlaganje na Savjetovanju za nacrtnu geometriju u Skoplju, 1988.
- [2] Colloquium on Computer Aided Education in Descriptive Geometry, Vienna, 1992.
- [3] PLETENAC, L.: Kompjutorska grafika, izlaganje na XVII jugoslavenskom savjetovanju za nacrtnu geometriju, Zagreb 1990.
- [4] PLETENAC, L.: Nove tehnologije u nastavi, Zbornik radova međunarodnog simpozija "Tehnologija i društvo", Opatija 1994.
- [5] PLETENAC, L.: Neke plohe drugog i viših redova i kompjutorska grafika, Jugoslavensko-austrijski susret geometričara, Plitvice, 30. 05. - 03. 06. 1988. (str.24)
- [6] POLIĆ, S. i FRESL, K.: Suvremeni alati za grafičku prezentaciju, izlaganje na XVII jugoslavenskom savjetovanju za nacrtnu geometriju, Zagreb 1990.
- [7] Proceedings of 3rd International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, July 1988. Vienna, Austria
- [8] Proceedings of 5th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, August 1992. Melbourne, Australia
- [9] Proceedings of 6th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, August 1994. Tokyo, Japan
- [10] STACHEL, H.: Descriptive Geometry, The Art of Grasping Spatial Relations, Proceedings of 6th ICECGDG 1994. Tokyo, (533-535)
- [11] STACHEL, H.: Degenerate Intersection in Solid Modeling, Proceedings of 6th ICECGDG 1994. Tokyo, (191-195)

Mr. sc. Lidija Pletenac
 Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci
 51000 Rijeka
 Viktora Cara Emina 2
 tel: 262-388
 e-mail: pletenac@master.gradri.hr

200 godina sustavnog grafičkog komuniciranja

Grafička komunikacija počinje u praskozorje civilizacije. Još kad je naš prasugrađanin *Homo krapiniensis junior* napustio špilju, bio je primoran graditi skloništa. Taj posao je nužno usavršavao sve do stupnja kad je zatrebao pomoć rođaka. Da bi ostvario svoju zamisao (projekt) morao je pomagačima objasniti (opisujući) što želi. Kad ni to ne bi bilo dovoljno, šarao je po pijesku (geometrizirajući). Dakle, opis i geometrija, odnosno opisna geometrija.¹ Prastarog li naziva!

Prodoše mileniji. Civilizacija ostavlja mnoge tragove, prvenstveno iz područja građenja: Babilon, Grčka, Egipat... sve do renesanse i do suvremenog građenja. Nailazimo na niz vrlo složenih i krajnje precizno izvedenih građevina, koje su zahtijevale isto tako precizne predloške, grafičke zapise, razrađene zamisli. Kako drukčije izvesti uske kanale kroz masu piramida kroz koje se u stanovitom trenutku vidi određena zvijezda?

Kako isklesati na zabatu grčkog hrama eliptični otvor da bi promatrač vidio kružnicu (Apolonije)? Kako bez korektnih grafičkih zapisa izvesti montažne elemente kupole Šibenske katedrale? Očito je da su graditelji vladali različitim metodama projiciranja prostora, jer drukčije nije moguće zamisliti svekolike gradnje.

Gotovo ni jedna spoznaja ljudske vrste nije držana u većoj tajnosti. Ne postoje bilo kakvi zapisi o metodama projiciranja. Zasigurno je svaki graditelj imao svoje metode, ali se one nisu mogle učiti. Prenošene su i čuvane kao najveća cehovska tajna. Kako se s vremenom povećao broj poznavatelja koje od (ne još univerzalnih, matematičkih) metoda, tajna je postala državna i, posebno, vojna.

Teško je to danas shvatiti kad je svijet preplavljen informacijama grafičkog porijekla, ne samo onim složenim, matematičkim, projekcijskim, nego i sasvim običnim, trivijalnim znakovima. Jasno je da čovjek danas može opstati prvenstveno ako vlada osnovnim znanjima: čitati, pisati, računati i grafički komunicirati. A sve se to uči. Sustavno.

Život bez grafičke komunikacije danas je nezamisliv. Kako bi bilo voziti automobil i opaziti veliki pano na kojem piše: "Naići ćete na vrlo oštar desni zavoj, pa radi toga smanjite brzinu na 30 km/h", i to još recimo na mađarskom jeziku. Kako će na istom velikom gradilištu surađivati hrvatski, japanski i njemački graditelji ako

¹ U Hrvatskoj je ponajprije upotrebljavan korektan prijevod iz francuskog originala — opisna geometrija. Kasnije je iz ruskog preko istočnih krajeva ušao sasvim neadekvatan naziv — nacrtna geometrija. Ovu nezgrapnost neki su autori izbjegavali upotrebljavajući strani naziv — deskriptivna geometrija. Predlažem da se vrati hrvatski naziv, dakle, opisna geometrija.



Gaspard Monge (1746.-1818.)

pritom ne govore istim stranim jezikom (recimo, engleskim). Odgovor je nedvosmislen — matematički precizan grafički izražaj najuniverzalniji je jezik sporazumijevanja.

Prve je zapise o projiciranju prostora ostavio veliki Leonardo, no riječ je o centralnom projiciranju (perspektiva), kao samostalnoj metodi, namijenjenoj prvenstveno likovnom izražavanju. U "običnom" svijetu vlada u tom području još uvijek mrak, sve do Napoleona.

Veliki imperator imao je malo prijatelja, a među malobrojnim zasigurno najistaknutije mjesto zauzima matematičar Gaspard Monge (1746.-1818.) Ovaj izuzetno talentirani Francuz, porijeklom iz siromašne obitelji, već je u šesnaestoj godini imenovan profesorom fizike u gimnaziji u Lyonu. No karijeru je nastavio u inženjerskoj akademiji u Mezieresu. Tu na sreću nije mogao biti proizveden u čin poručnika (zbog svog porijekla), pa mu je, pored za njega trivijalnih poslova (crtanje karata), ostalo mnogo vremena za matematiku, napose geometriju, kojoj je bio izuzetno sklon. No sklonost je pokazivao i prema umjetnosti, gdje se razvio u vrsnog poznavatelja. Objе su te sklonosti odredile njegov buran i bogat život.

U vojnoj školi dugo je rješavan problem kako sagraditi utvrdu tako da ni jedan njen dio ne bude izložen neposrednoj neprijateljskoj vatri. Monge donosi brzo i, kako se pokazalo, ispravno rješenje, a da se uopće nije pos-

lužio mučnim i dugotrajnim aritmetiziranjem. Čista geometrijska metoda, kojom se poslužio, nije do tada bila poznata, pa je odmah proglašena najstrože čuvanom tajnom. U tom je smislu Monge morao i prisegnuti te se petnaestak godina nije znalo da je otkrivena opisna geometrija.

Tek kada je u općem zamahu liberalizma u Parizu stvorena École Normale, dopušteno je novom profesoru Gaspardu Mongeu držati javna predavanja o toj metodi (1794.), a godinu dana kasnije objavljena mu je i knjiga *Géométrie descriptive*. Veličina Mongeove ideje prije svega je u nevjerojatnoj jednostavnosti. Lagrange, koji je slušao nastupno predavanje 1794. i ponovljeno 1796. u École Polytechnique, izjavio je: »Prije no što sam čuo Mongea nisam znao da znam opisnu geometriju.«

Zašto nešto tako jednostavno nije otkriveno prije? Pona najprije zbog cehovske tajne, ali i zato što je trebalo razviti koordinatno razmišljanje o prostoru. Svemu je, dakle, trebao prethoditi jedan Descartes. A Monge je upravo ortogonalno projiciranje prostora povezao s koordinatnim razmišljanjem, tako da prostor projicira istovremeno na dvije međusobno okomite ravnine. Pritom, iz praktičnih razloga, jednu uzima horizontalno, a drugu vertikalno. Nakon projiciranja, oko presječne (os x), razvija ravnine u jedinstvenu ravninu (crtači stol) te trodimenzionalne oblike prikazuje dvjema povezanim dvodimenzionalnim slikama. Ovaj postupak omogućava razmišljanja u dva smjera: iz prostorne tvorevine dobiti projekcije, ali i iz projekcija jednoznačno rekonstruirati prostornu tvorevinu. Upravo tu leže korijeni industrijske revoluciji u posljednja dva stoljeća jer kako bi drugačije bilo moguće konstruirati silne strojeve (nažalost i oružja).

Monge uvodi dvije osnovne grupe odnosa:

- položajni odnosi — projekcije elemenata, tj. točke, pravca, ravnine. Točka na pravcu, sjecište pravaca, pravac i točka u ravnini, presjek dviju ravnina, probodište ravnine pravcem, paralelnost...
- metrički odnosi — prave veličine dužine, kuta i likova, likovi u ravnini zadanih veličina, okomitost...

Ove dvije grupacije omogućuju razrješenja i najsloženijih prostornih odnosa, kao npr. istraživanje prodora dviju ploha, dirne ravnine i normale, sjene, izofote itd. Nije se Monge zaustavio samo na opisnoj geometriji. I danas su cijenjeni i poznati njegovi radovi iz područja diferencijalne geometrije, gdje je istražujući zakrivljenosti ploha zapravo preteča Gaussa i Riemana. Iz tog razdoblja potječe i danas važna Mongeova diferencijalna jednadžba te Monge-Ampèreova parcijalna diferencijalna jednadžba.

Monge je brzo i jednostavno postao članom Francuske akademije, ali je nakon Napoleonova pada izbačen, kao i neki drugi imperatorovi prijatelji. Nisu pomogle niti velike zasluge koje je Monge imao i izvan matematičke domene.

Napoleon je, naime, imenovao Mongea šefom ekipe koja je po Italiji skupljala slike, kipove i druge umjetnine što su ih Talijani trebali "pokloniti" kao svoj doprinos za

pokrivanje troškova imperijalnih ratova. Kako ovo zvuči poznato danas u Hrvatskoj! Ova pljačka jenjala je tek onda kad su napunjeni Louvre i neki drugi sabirališni centri. Slična je pljačka ponovljena još jednom — prilikom Napoleonova pohoda na Egipat. Taj put Monge je za suradnika imao još jednog matematičara, puno mlađeg Fouriera. Egipćani nisu "poklanjali" svoje umjetnine. Njih je naprosto trebalo civilizirati, a njihovu umjetnost spasiti od njih samih te zbog čuvanja prenijeti u Louvre. Danas se svijet divi francuskim zbirkama, a posebno su u Louvreu značajni talijanski i egipatski odjel. Zbog starosti Monge, na svoju sreću, nije sudjelovao u pohodu na Rusiju.

Zahvaljujući svojoj krajnjoj jednostavnosti Mongeova opisna geometrija brzo se proširila Europom. Valja spomenuti neke matematičare koji su sudjelovali u njenoj doradi i razradi: Mannheim, Gourniere, Wiener, Fiedler, Pesehka, Loria, Rhon, Müller, *Majcen, Niče*. Sama je teorija vrlo brzo postala dorečena te se gubio interes matematičara za to područje, a rastao interes konzumnata. No da bi se i s matematičke pozicije moglo pridonijeti širenju sadržaja i metoda opisne geometrije trebalo je razvijati neke druge teorije. Tako uočavamo neposredni utjecaj na razvoj projektivne geometrije, posebno sintetičke (Desargues, Pascal, Steiner, Raye ... Četveruhin, *Majcen, Niče*). Uzajamnim djelovanjem tih dviju teorija stvorena su posebna područja opisne geometrije, kao ciklografska projekcija, kotirana projekcija, aksonometrija, perspektiva, anaglifna perspektiva, fotogrametrija...

Pogledamo li nizove imena u prethodnom odlomku lako je uočiti da oba niza završavaju s dva zagrebačka matematičara te je ovo prilika da se i o njima ponešto kaže.

Istaknuti geometričar svjetskog glasa akademik Juraj Majcen bio je vrstan istraživač i pedagog. Njegovo najznačajnije djelo je otkriće jednog kubičnog kompleksa. Okupivši oko sebe nekoliko mladih matematičara, stvorio je ono što su u svijetu nazvali "zagrebačkom geometrijskom školom". Njegov je znanstveni opus relativno skroman jer je mlad umro. No s današnje pozicije gledano, njegov je najveći doprinos hrvatskoj matematičkoj znanosti u tome što je u svijet geometrije uveo Vilka Ničea.

Vilko Niče (1902.-1987.) svakako je bard hrvatske geometrije. Taj akademik, okorjeli sintetičar i pedagog, ostavio je iza sebe opus od 71 znanstvenog rada i 6 knjiga, čemu treba pridodati veći broj mentorstva, dakle "njegovih" doktora i magistara znanosti. Golem je broj matematičara i inženjera kojima je Niče u živom sjećanju.

Osim što je gostovao na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu (Nacrtna geometrija II i III, Sintetička geometrija, Poslijediplomski studij) i drugdje, radio je stalno najprije na Tehničkom fakultetu, zatim na AGG fakultetu te najzad na Arhitektonskom fakultetu. Kraj rata 1945. zatekao ga je na dužnosti dekana Tehničkog fakulteta, gdje je od razaranja spasio biblioteku AGG fakulteta te laboratorije Zavoda za mehaniku. Na-



Vilko Niče (1902.-1987.)

kon rata bio je u zvanju degradiran te je iz početka, po drugi put, gradio sveučilišnu karijeru. Za razliku od drugih profesora slične sudbine, valjda greškom, nije rehabilitiran.

Niče je bio prototip pravog gospodina i veliki čovjek. Njega bi čak i Diogen pronašao. Gotovo uvijek s leptir-kravatom i u lovačkom hubertusu, okupljao je velik broj prijatelja, među kojima su se isticali matematičar Blanuša, arhitekti Deuzler i Vrkljan te geodet Macarol. Područje njegova znanstvenog djelovanja neobično je široko — od istraživanja krivulja i općih i pravčastih ploha, preko specifičnih izvođenja: cisoidalnog, nožišnog, preko sustavno izvedenih kvadratnih transformacija, pa do krune njegova djelovanja: četiri kompleksa vezana uz pramenove polarnih prostora kvadraka. Jedan od ta četiri kompleksa ušao je u svjetsku literaturu kao Ničeov kompleks.

Mnogo je matematičara koji su surađivali s Ničoom ili nastavili njegovo djelo. Spomenimo svjetske: Decuyper (Francuska), Bothema (Nizozemska), Hohenberg (Austrija), Wunderlich (Austrija), Brauner (Austrija), Mateski (Mađarska), Vujaković (BiH)...

Valja spomenuti i domaće (tzv. Ničeovu školu): Palman, Dočkal, Ščurić, Kučinić, Kranjčević, Horvatić, Slipečević, Gorjanc, Saler...

Utjecajem sintetičke geometrije na opisnu geometriju, a posebno potrebom prilagodbe na primjenu u pojedinim tehničkim znanostima, danas se u svijetu pojavljuju modificirane geometrijske discipline kao što su primijenjena geometrija, konstruktivna geometrija, geometrija u tehnici ili poblize "Baugeometrie" i sl. Ovaj trend neovisno je započeo u Kijevu, Zagrebu i Grazu, da bi do sada u najvećem dijelu Europe postao standardan. Kompiuterska grafika još je suviše blizu da bi s odstojanja mogli ocijeniti njenu pojavu. Zasad je ona samo jed-

no vrlo precizno i nadasve moćno sredstvo za crtanje. Dosta je pokazatelja po kojima će kompiuterska grafika postati i znatno više od toga.

Valja još ponešto reći i o pedagoškom aspektu u odnosu na spominjane teorije. Kako je *solfeggio* jedino sredstvo da se glazbeni sluh razvije i učini stvaralačkim, tako je i prakticiranje opisne geometrije jedini pedagoški i psihološki način da se na zadovoljavajućoj razini razvije prostorni zor, tj. sposobnost korektnog i kreativnog vladanja odnosima u prostoru. Ima ljudi čiji sluh nije moguće razviti nikakvim sredstvima. Isto tako ima ljudi kojih je prostorni zor apsolutno mrtav. Prvi ne mogu biti dirigenti, dok potonji nipošto ne bi smjeli imati pristupa tehnicima, iako mogu biti matematičari nekog dugog profila. Zato i nije čudno da ima matematičara koji ne podnose geometriju realnog prostora. Još je Hermite u Mongeovo doba rekao: »Ne mogu opisati napore na koje sam bio osuđen da razumijem nešto od dijagrama deskriptivne geometrije, koju mrzim.« Za one kod kojih nije izgubljena sva nada postoje danas izvanredne pedagoške metode, kao što je linearno programiranje u okviru kibernetički zasnovane nastave. To je još jedno područje gdje je Zagreb odigrao pionirsku ulogu te postoji svjetski priznat "zagrebački model", koji se primjenjuje npr. u Parmi i Bruxellesu. Svrha te metode je da se efikasno i "neosjetno" postignu određeni rezultati. U igri je zapravo "kafkijanizam" i metamorfoza osjeta prostora — neosjetno i nesvjesno prema uzrocima.

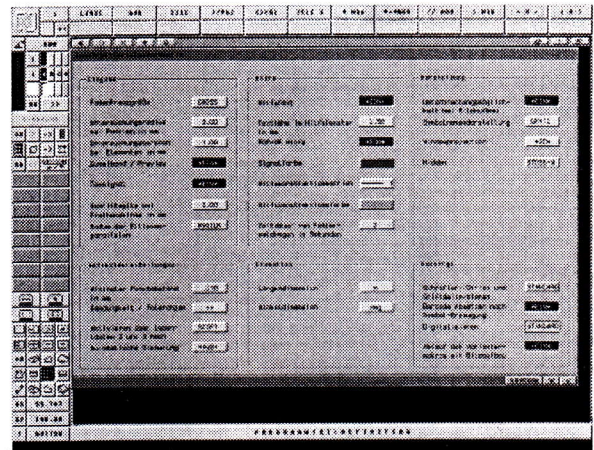
Danas doživljavamo početke direktnog trodimenzionalnog (virtualnog) prikaza prostora pomoću elektronike. Budući da je omogućeno i direktno trodimenzionalno računanje, teško je i zamisliti kakva nas budućnost čeka. Ako je završetak drugog tisućljeća obilježen naftom, ugljenom i željezom, onda je silicij počelo početka trećeg milenija.

Programi CAAD

(Computer Aided Architectural Design)

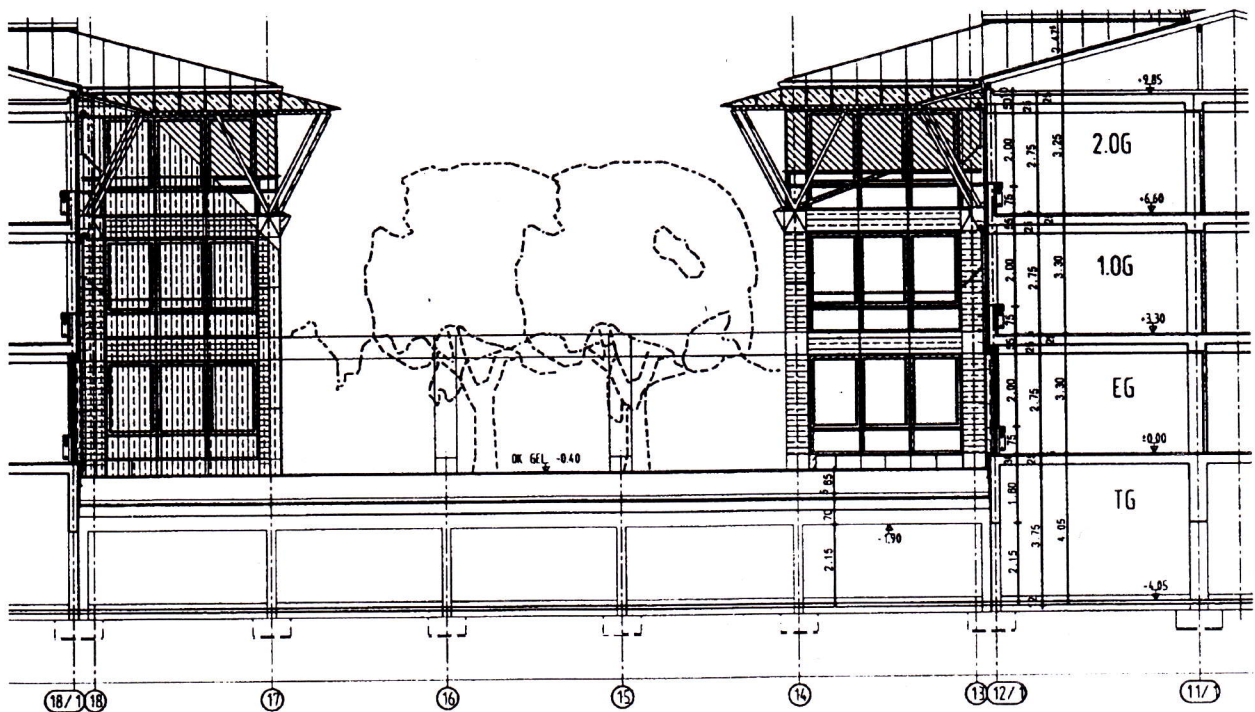
Projektiranje arhitektonskih građevina složen je proces koji se sastoji od više faza. Današnja računala i sve savršeniji programi pokrivaju gotovo sve faze ovog procesa, od idejnih rješenja (arhitektonske koncepcije), izrade crteža građevine, popratne tehničke dokumentacije do fotorealističkih prikaza buduće građevine i njene animacije u stvarnu sliku. U ovom članku dotaknut će se mogućnosti programa i dijelovi programskih paketa namijenjeni izradi 2D crteža i 3D modela na PC računalima.

Arhitektura je spoj tehničke i likovne kreativnosti s tehničkim i tehnološkim elementima. Iz ovoga treba zaključiti da računalo i programska podrška trebaju pomoći arhitektu — projektantu pri izradi projekta, a ne ga ograničiti svojim mogućnostima. Mnogi misle da će računalom riješiti sve probleme. Ono je tu da nam pomogne, a ne da nas ograniči u našem radu i mašti. Ponekad će nam pomoći pri definiranju formi i oblika koji dolaze iz nekog "drugog svijeta" nama do tog trenutka nepoznatog. Oni mogu dopuniti naša razmišljanja, ali nas ne smiju lišiti subjektivnog ocjenjivanja.

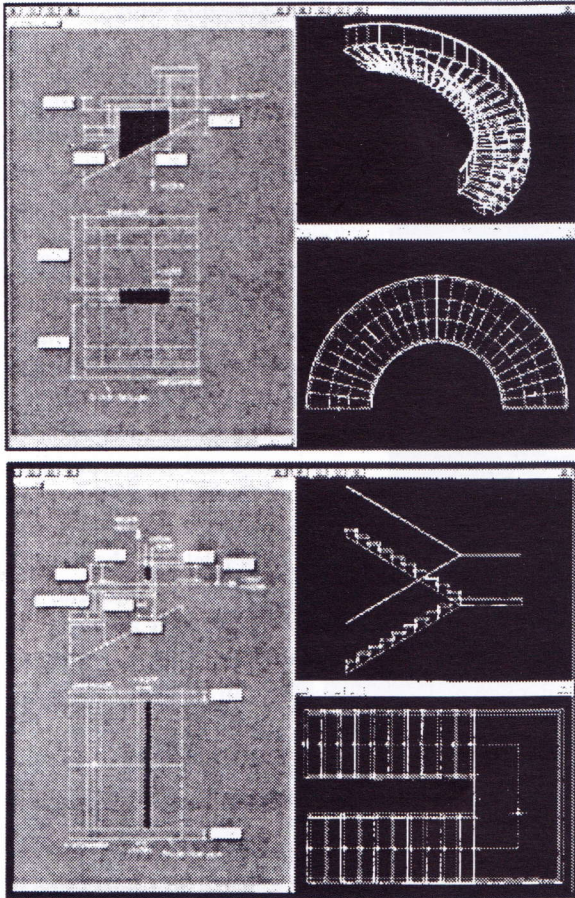


Prozor za definiranje parametara - Program ALLPLUS

Na tržištu u svijetu postoji velik broj programa namijenjenih izradi arhitektonskih crteža i modela u raznim fazama izrade, i to od programa za konceptualno 3D modeliranje, 2D tehničko crtanje, 3D modeliranje, do programa za fotorealističko prikazivanje i animaciju. Današnja sve brža računala velike memorije, programski paketi velike jednostavnosti korištenja i opreme za konačnu prezentaciju i vizualizaciju učinili su računalo



Presjek iscrtan programom ALLPLUS



Definiranje parametara za iscrtavanje stubišta

gotovo nezmjenjivim segmentom u procesu nastajanja građevine, od ideje do realizacije.

Sredinom osamdesetih godina, dolaskom na tržište osobnih računala i njihovom dostupnošću širem krugu ljudi počinje i njihova veća primjena u arhitektonskom projektiranju. Prva računala i programi za crtanje omogućili su korisnicima da umjesto po papiru iscrtavaju linije po ekranu. Nije bilo razlike u tome tko koristi program za tehničko 2D crtanje: strojari, građevinari, arhitekti... To su bili programi koji su se koristili poput elektronskih crtaćih pera. Prilikom crtanja grške su se brzo ispravljale, crteži su se lako prebacivali u mjerilo prema potrebi faze za koju su bili namijenjeni i zatim se pomoću pisača (printera) ili

crtača (plotera) iscrtavali na medij (papir) za daljnju upotrebu.

Napredak pri izradi projekata dolazi do izražaja kod pojave programa s mogućnošću 3D modeliranja (solid modeling). Ovi programi sastavljaju građevinu od osnovnih elemenata. Proces sastavljanja modela svodi se na superpoziciju skupova elemenata. U svakom trenutku moguće je iz određenog kuta pogledati model i odlučiti se za izbor varijanti.

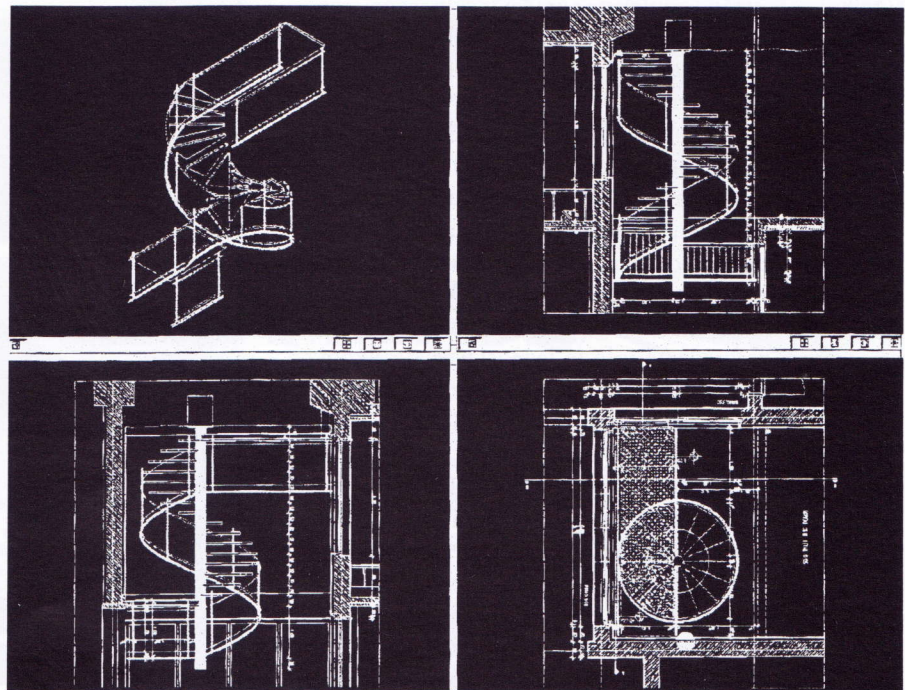
Dodatna pomoć stiže pojavom programa s bazom elemenata i simbola u 2D i 3D. Gotovo svake godine proizvođači programa izlaze na tržište s novim programima i doradenim verzijama postojećih. Svima je u interesu što više se dodvoriti korisnicima i omogućiti im što jednostavniji rad na njihovim paketima.

AUTOCAD

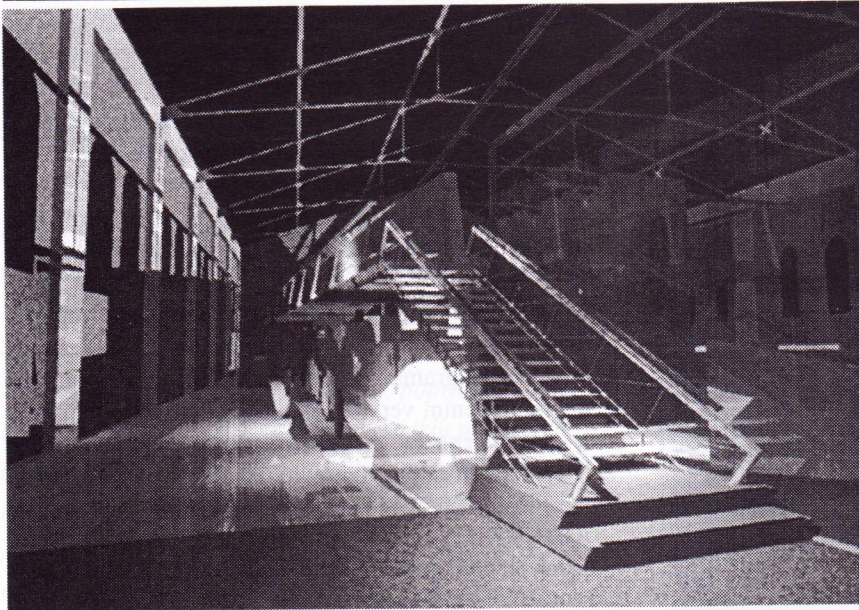
Jedan od prvih proizvođača programa namijenjenih izradi tehničkih crteža je Autodesk. On je sa svojim programom AutoCAD doživio trinaestu verziju te kreće dalje. Prve verzije programa omogućavale su izradu 2D crteža bez realnih 3D mogućnosti. Svaki prostorni problem morao je riješiti sam korisnik, a svaka se projekcija (tlocrti, presjeci, pročelja) morala posebno iscrtavati. Posljednje verzije uz 2D crtanje imaju mogućnosti potpunog modeliranja (solid modeling). Da bi prilagodili program arhitektima, Autodesk je razvio i ponudio programski paket AEC kao dopunu i nadogradnju osnovnog AutoCAD programa.

ARCHICAD

Drugi program namijenjen isključivo arhitektima je ArchiCAD proizvođača Graphisofta. Program, koji početak bilježi kao programski paket namijenjen radu na



Automatsko crtanje stubišta u četiri projekcije. Izmjena detalja u bilo kojoj projekciji izmjenjuje sve ostale prikaze.



Fotorealistički prikaz stubišta

Apple Macintosh računalima, od verzije 4.1 prilagođen je i za rad na PC računalima. Pri izradi crteža (modela) koriste se posebni alati koji se odabiru na ekranu i pomoću kojih se crtaju konstruktivni i ostali elementi građevine. Problemi se javljaju kod netipičnih konstrukcija gdje za prikazivanje treba ovladati programskim jezikom za programiranje oblika.

ALLPLAN

Nedavno se na našem tržištu pojavio program ALLPLAN proizvođača Nemetschek iz Njemačke. Program se temelji na tridesetogodišnjem praktičnom iskustvu građevinskog biroa prof. Nemetscheka, gdje više od 450 suradnika (pretežno arhitekata i građevinskih inženjera) radi na razvoju programa. Ovaj CAD sistem prihvaćen je na tržištu Europe pa se može očekivati da će i kod nas zauzeti čelnu poziciju.

Program na tržište dolazi kao ALLPLAN 300, osnovni modul za crtanje i konstruiranje u 2D i 3D, ili kao program dograđen ostalim modulima za pokrivanje svih faza projektiranja (statika, troškovnici, poslovanje...). Program koristi unaprijed definirane elemente iz postojeće baze ili novounesene elemente. Automatski konstruira presjeke i kotira crteže. Rad sa 3D tehnikom ravnina i višeslojnim pregradama vrlo je jednostavan. Prilikom crtanja postoji mogućnost kontrole prostornog prikaza, izračunavanja površina, kontrole količine materijala (dokaznica mjera), kontrole cijene...

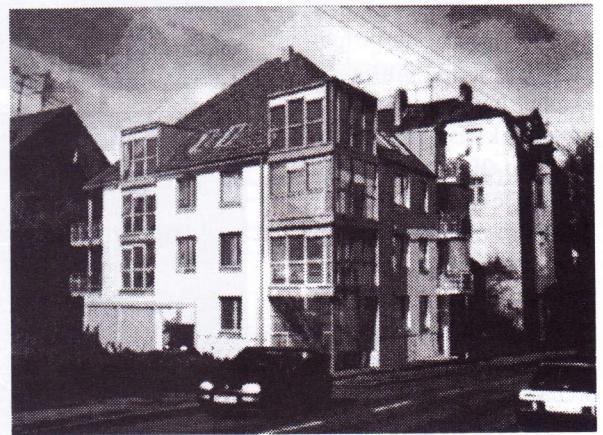
Program sadrži bogati katalog simbola u 2D i 3D (arhitektura, instalacije, urbanizam...). Konstruiranje stubišta je automatsko prema definiranim parametrima stubišta. Program razvijen u Njemačkoj koristi se pri prikazivanju proračunima i podacima iz DIN-a. U zemljama gdje ovaj program ima veći broj korisnika proizvođači su ga doradili prema zakonima i normama koje vrijede u tim zemljama. Nadamo se da će tako biti i kod nas. A do tada možemo koristiti ovaj programski paket u njego-

vom izvornom obliku.

Navedeni u ovom članku, kao i niz ostalih kvalitetnih, našem tržištu manje poznatih programa namijenjenih arhitektima rade na principu pokrivanja gotovo svih faza izrade arhitektonskih nacrti i dokumentacije. Kod većine programa postoji mogućnost njihovog međusobnog komuniciranja s *fileovima* formata DXF, a kod nekih i s DWG formatom.

U početku projektiranja gotovo svi programi mogu prenijeti snimljene situacije terena pomoću digitalizatora u sam program i dalje ih obrađivati. Pri izradi crteža (modela) koriste se posebni alati koji se odabiru na ekranu i pomoću

kojih se crtaju konstruktivni i ostali elementi građevine. Npr. za crtanje pregrada - zidova sastavljenih od više slojeva, dovoljno je definirati ih u podmeniju, a zatim samo crtati obrise tlocrta i na ekranu će se pojaviti slojevita pregrada — zid. Otvori u zidovima (prozori, vrata...) također se definiraju u podmeniju, a zatim se ubacuju u crtež. I ostali elementi unose se na sličan način ili

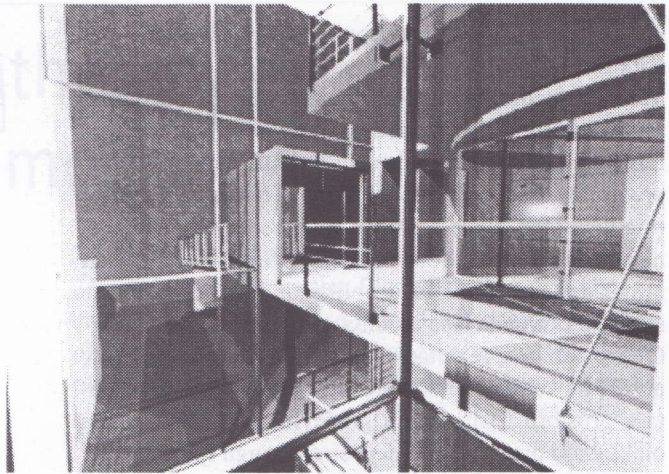


Ubacivanje modela u foto prikaz

se koriste gotovi elementi iz baze — biblioteke. Promjene na samom elementu iz baze mijenjaju već ucrtani element u crtežu. Ako želimo promijeniti tip prozora predviđenog u prethodnoj fazi crtanja dovoljno je izmijeniti ga kao element u bazi i svi prozori crtani kao taj element bit će izmijenjeni.

Programi koriste vlastitu biblioteku elemenata i simbola, omogućuju izradu i dopunu biblioteke prema zahtjevima korisnika ili korištenje elektronskih kataloga proizvođača.

Prilikom crtanja višekatnih građevina kod kojih se ponavljaju isti tlocrtni rasporedi katova, program te katove jednostavno kopira na druge vi-



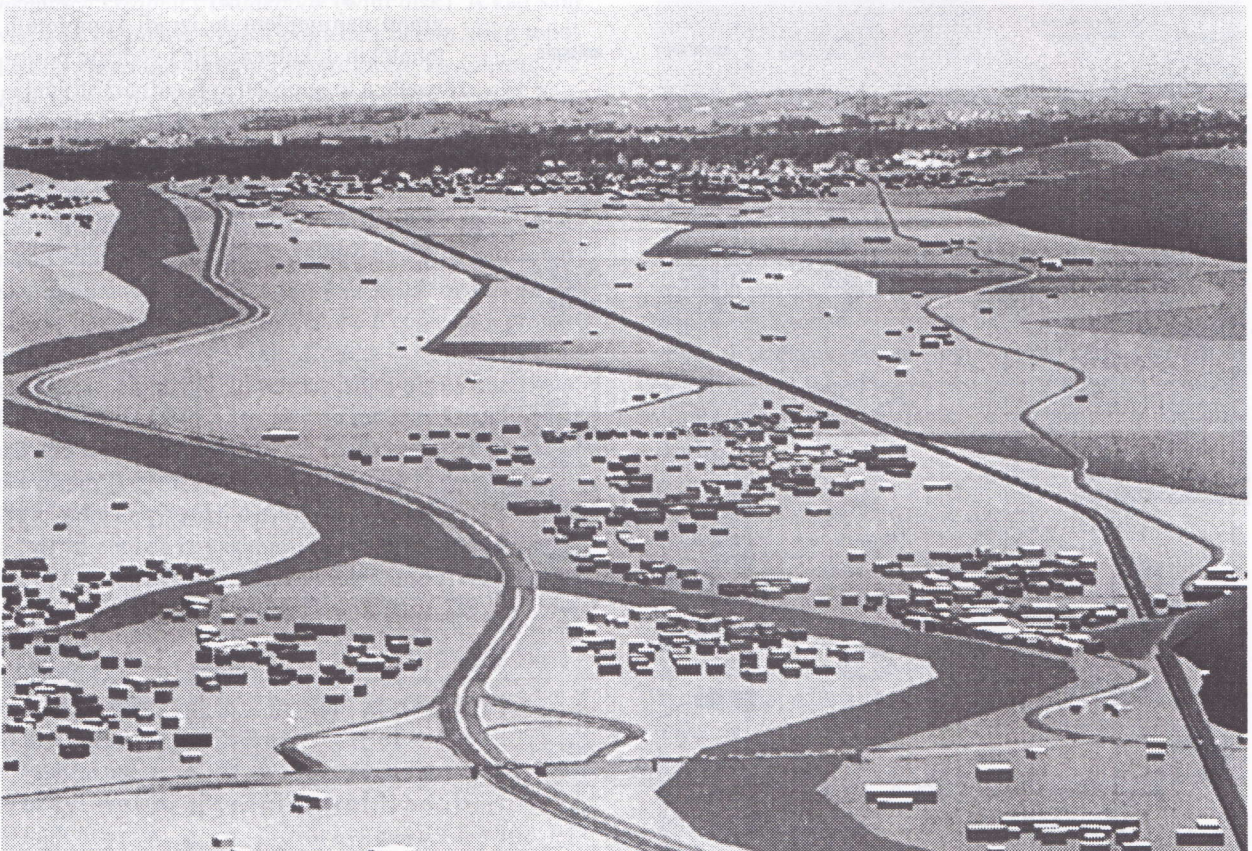
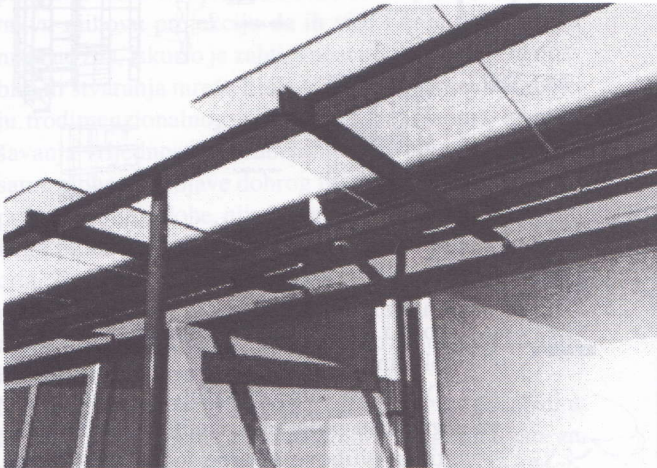
Animacija i prezentacija modela

sinske kote. Eventualne razlike lako se ispravljaju. Kod projektiranja je moguće mijenjati raspored elemenata na jednom katu, a program će automatski unositi izmjene i na ostale katove.

Crtanje kosih krovova i otvora na njima vrlo je brzo i jednostavno.

Crtanje i prikazivanje presjeka kroz definiranu građevinu također je vrlo jednostavno. Odredi se ravnina presjeka u tlocrtu i u tom trenutku program iscrtava presjek. Dijelovi crteža se prema potrebi mogu uvećavati i izdvojeno iscrtavati kao detalji.

Programi omogućuju i automatsko vođenje do-



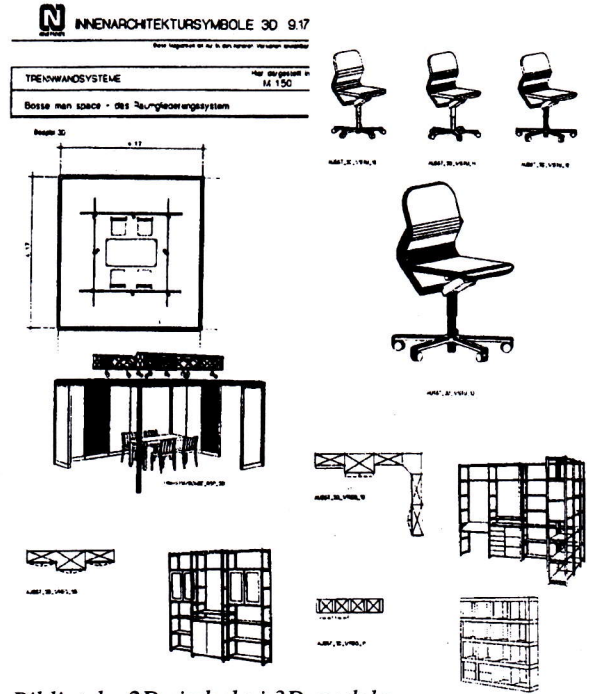
Urbanistički planovi integrirani u realnu fotografiju

kaznice mjera koja se može pregledati u bilo kojem trenutku.

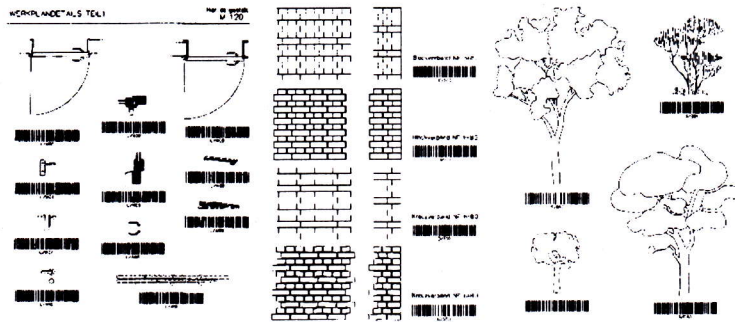
Velika je prednost ovih programa što omogućuju dodatnu obradu iscrtanog modela građevine za prezentaciju. Plohama se mogu dodati razni atributi: boja, tekstura, prozirnost, refleksija; model se može smjestiti u prostor (digitaliziranu sliku), možemo mu odrediti rasvjetu i njene attribute te dobiti fotorealistički prikaz. Ti se prikazi mogu dodatno obraditi u obliku animacije, za što je svakako potrebna jača oprema.

Ovako dobiveni rezultati sigurno zadržavaju investitora, ali su i od velike pomoći arhitektu pri provjeri elemenata u prostoru i smještanju građevine u okolinu te mu olakšavaju prezentaciju ideje širem krugu ljudi.

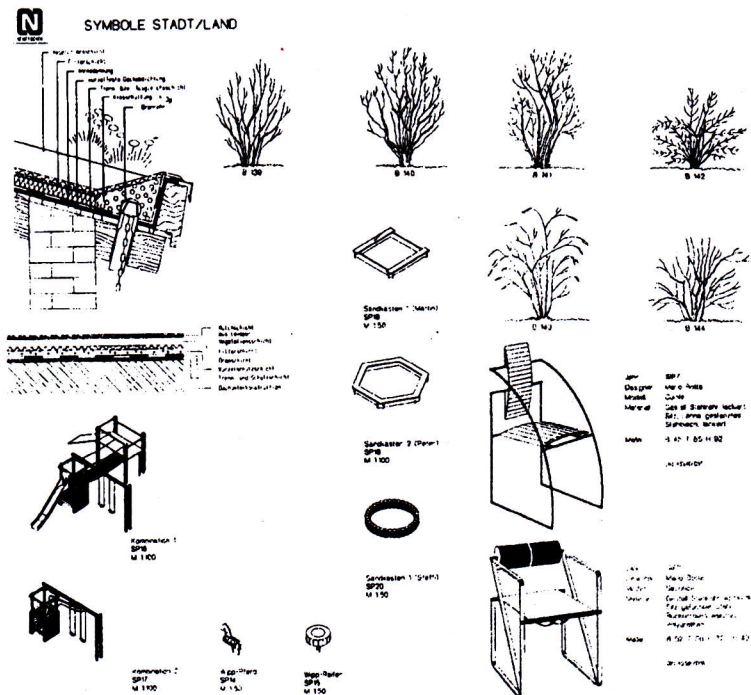
Konačna faza pri razvoju 3D programa namijenjenih arhitektima je virtualni svijet koji omogućuje korisniku slobodno kretanje i izmjene u okviru definiranog modela. Na taj se način mogu konstruirati i simulirati svi prostori i građevine, provjeravati njihova funkcionalnost, dotjerivati konstruktivni detalji te provjeriti utjecaj pros-



Biblioteka 2D simbola i 3D modela



Biblioteka 2D simbola



Biblioteka 2D simbola i 3D modela

tora i građevine na buduće korisnike i okolinu.

Ovdje su samo površno dotaknute mogućnosti programa namijenjenih arhitektima. Njihove stvarne mogućnosti pojedincu su gotovo nesagledive. Današnji programi namijenjeni su izradi kompletnih tehničkih dokumentacija i vođenju poslovanja, a to je posao koji radi niz stručnjaka različitih usmjerenja. Svaki od njih naći će u sklopu ovih programa područje svog interesa. Daljnje upoznavanje s pojedinim programima i načinom njihovog rada otvorena je tema za neku od sljedećih prigoda.

Detalj primjene Mathematice u konstruktivnoj geometriji

Zatekne li se pojedinac, sklon zoru, da razmišlja i zamišlja unutar zakona trodimenzionalnog euclidskog prostora, plohe će mu se nesumnjivo pojaviti kao izazov. Zanimljive su zbog svoje raznolikosti, ljepote ili upotrebljivosti oblika, iznenadnog čudnog ponašanja u okolinama nekih točaka i zbog još mnogo razloga, među kojima je svakako i njihov grafički prikaz. Svatko tko je pokušavao crtati plohe, napraviti takvu njihovu projekciju da ih vidi i onaj tko o njima ništa ne zna, iskusio je zahtjevnost ovoga posla. Od odabira ili stvaranja mreže linija (čije iscrtavanje daje iluziju trodimenzionalnog u dvodimenzionalnom), usuglašavanja vrijednosti odredbenih parametara projekcije i same plohe, do pojave dobrog i točnog crteža koji jasno prikazuje oblik plohe, nije lagan put. Prva pomisao onoga koga plohe nastave zanimati jest da mu ih netko drugi crta. Taj drugi, jasno, ne postoji. Druga ideja, upotreba računala, za nekog nevičnog programiranju (iako on može imati ozbiljnih geometrijskih razmišljanja o plohamama), donedavno je bila iluzorna.

Nije mi namjera davati pregled grafičkih mogućnosti u Mathematici. Onome koga to zanima preporučujem, za verziju 2.2, knjigu C. Smitha i N. Blackman *The Mathematica Graphics Guidebook* (with disk). A kad sam već kod literature, vrijedi pogledati barem slike topološkog "izvrtanja" kugle (Silvio Levy, *Visualizing the Eversion of the Sphere*, *The Mathematica Journal*, Vol. 6. Issue 1, 1996.). Što će biti u verziji 3, koja samo što nije stigla, ne znam. Priča se, a ima razloga povjerovati, da joj je grafika odlična.

Željela bih na samo nekoliko primjera (koje studenti naših tehničkih fakulteta obrađuju u okviru geometrijskih predmeta) pokazati kako je u Mathematici jednostavno dobiti prikladnu sliku plohe u centralnoj projekciji. Zbog lakšeg uočavanja naredbi, sve ću opcije koje se odnose na izgled konkretne slike pisati kurzivom. Naime, u primjerima koji slijede može se izbaciti tekst u kurzivu, a da Mathematica ipak crta sliku plohe (s drukčijim pogledom, različite boje, itd.).

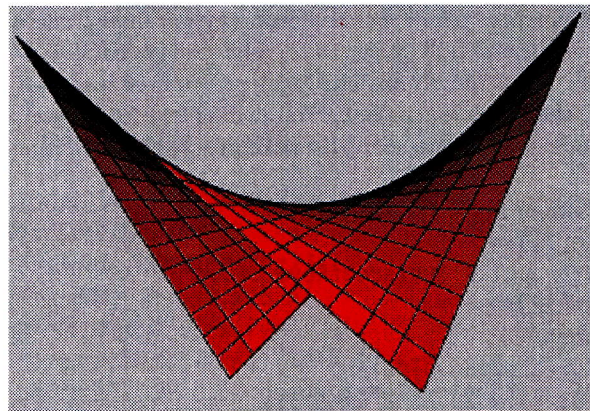
Na samom ću početku definirati tri funkcije za boju (K, L, M), budući da za tiskanje ovog časopisa, nadam se ne zadugo, možemo, uz crnu, koristiti samo crvenu boju.

```
In[1]:=
<<Graphics'Colors'
K[RGBColor[r_,g_,b_]]:=RGBColor[r,0,0]
K[GrayLevel[x_]]:=GrayLevel[x];
L[RGBColor[r_,g_,b_]]:=GrayLevel[r g b]
L[GrayLevel[x_]]:=CMYKColor[0,1,1,0];
M[RGBColor[r_,g_,b_]]:=GrayLevel[(1-r)^2 r]
M[GrayLevel[x_]]:=CMYKColor[0,1,1,0]
```

Za grafičku obradu ploha Mathematica u sklopu svoje 3D grafike nudi naredbu *Plot3D* koja je pogodna za crtanje onih ploha čije se jednadžbe mogu prikazati u obliku $z=f(x,y)$. Nije pogodna za crtanje algebarskih ploha, jer se već kod kvadraka može primijeniti samo na neke, npr. hipar.

Primjer 1

```
In[8]:=
Plot3D[4x y, {x, -6, 6}, {y, -12, 15},
BoxRatios->{1, 1, 1},
Boxed->False, Ticks->None, Axes->False,
ViewPoint->{2, -4, 0},
ColorOutput->K, Background->GrayLevel[.7] ]
```

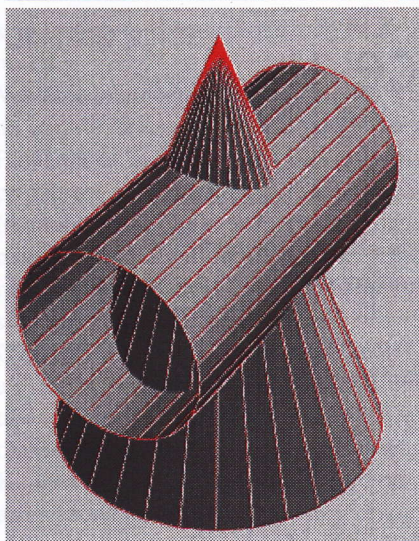


```
Out[8]=
-SurfaceGraphics-
```

Za bogatiji izbor služe dodatni paketi. Tako se, naprimjer, pomoću paketa 'Shapes' kugla, rotacijski stožac ili valjak, torus, Möbiusova vrpca i helikoid, rotirani, translaterani ili afino preslikani crtaju gotovo samo ispisivanjem imena plohe i transformacije. Ali, samo pomoću ovoga paketa neće se moći iscrtati prodorna krivulja danih ploha.

Primjer 2

```
In[9]:=
<<Graphics'Shapes'
In[10]:=
Show[Graphics3D[Cone[3.5, 4.5, 30]],
RotateShape[Graphics3D[Cylinder[2, 4, 30]], 0,
Pi/2, 0],
Boxed->False,
ViewPoint->{1.5, -2.5, 2},
ColorOutput->L, Background->RGBColor[.7, 1, 1] ]
```

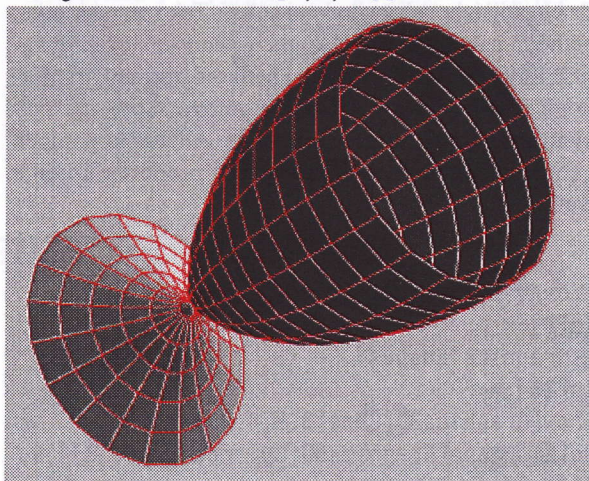


Out[10]=
-Graphics3D-

Za crtanje rotacijskih ploha odličan je paket 'SurfaceOfRevolution' u kojem se ravninska (zadana implicitno ili parametarski) ili prostorna krivulja (zadana parametarski) može rotirati oko bilo kojeg pravca kroz ishodište. U sljedećem je primjeru prikazan dio plohe koja nastaje rotacijom Decartesovog lista oko njegove osi simetrije.

Primjer 3

```
In[11]:=
<<Graphics'SurfaceOfRevolution'
In[12]:=
Show[
SurfaceOfRevolution[
{6t/(1+t^3),6t^2/(1+t^3)},
{t,-.2,.5},RevolutionAxis->{1,0,1}],
Axes->False,Boxed->False,Ticks->None,
ColorOutput->L,
Background->RGBColor[1,1,.7]]
```



Out[12]=
-Graphics3D-

Ipak, ako se znaju samo osnove zadavanja ploha parametarskim jednadžbama te ako se snalazimo u tri osnovna

koordinatna sustava (Kartezijevom, cilindričkom i sfernom) najpogodnije je koristiti paket 'ParametricPlot'. U Mathematici se naredbom *ParametricPlot3D* mogu dobiti crteži prostornih krivulja i ploha (ispisivanjem njihovih parametarskih jednadžbi) bez posebnog pozivanja paketa, ali se tada ne može, naprimjer, po volji odabirati korak varijable, što često smanjuje zornost prikaza.

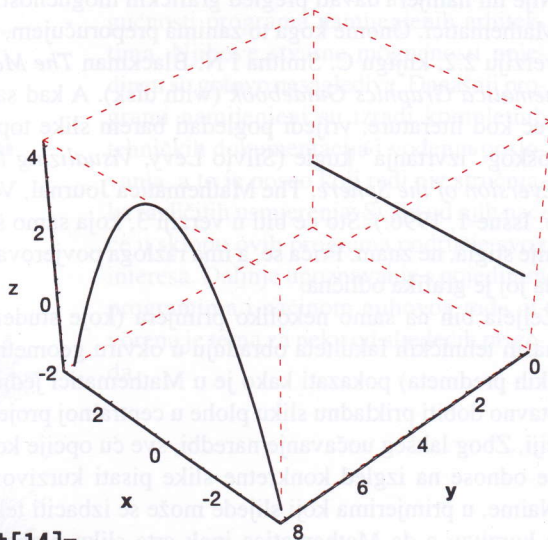
Primjer 4

Prikazati parabolički konoid¹ kojeg određuju: parabola ($y = 8, z = -0.5x^2 + 4$), x-os ($y = 0, z = 0$), te direkcijska ravnina ($x = 0$).

Rješenje :

Za konačne ravnalnice konoida parametarske jednadžbe gotovo su već ispisane u zadatku, pa ih se može nacrtati.

```
In[13]:=
<<Graphics'ParametricPlot3D'
In[14]:=
ParametricPlot3D[{{x,8,-.5x^2+4},{x,0,0}},
{x,-3.5,3.5,.1},
ViewPoint->{-3,3,3},
AxesLabel->{x,y,z},
BoxStyle->{Dashing[{.01,.02]},Hue[1]},
AxesStyle->Thickness[.004] ]
```



Out[14]=
-Graphics3D-

Izvodnice konoida paralelne su s ravninom $x = 0$, tj. leže u ravninama $x = k, k \in R$

Kako sijeku i konačne ravnalnice, one su spojnice točaka $(k, 0, 0)$ i $(k, 8, -0.5k^2 + 4)$, $k \in R$.

Stoga je $z = (-0.5k^2 + 4)y/8$ jednadžba izvodnice u ravnini $x = k$, a onda

$z = (-0.5x^2 + 4)y/8$ jednadžba konoida.

Za potrebe crtanja prijeći ćemo na parametarski zapis.

¹ Konoidi su pravčaste plohe kojima je jedna ravnalica neizmerno daleki pravac, tj. jedan sistem njihovih izvodnica paralelan je s jednom ravninom. Ovu ravninu nazivamo direkcijskom.

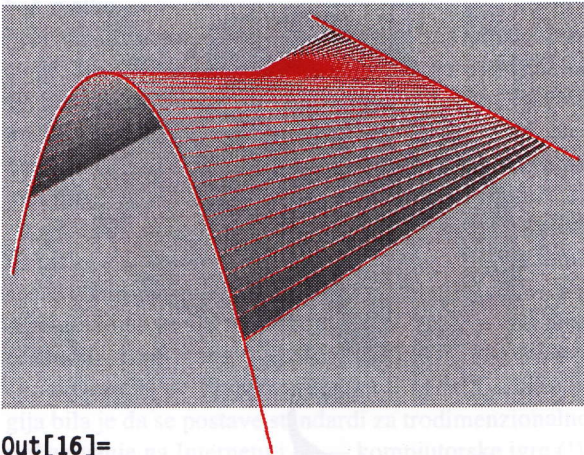
In[15]:=

```
KONOID1[x_,y_]:= {x,y,(-.5x^2+4)/8 y}
```

Sada se može prikazati dio konoida omeđen ravninama $y = 0$, $y = 8$ i $z = 0$. Na istoj ćemo slici iscrtati i konačne ravnalice.

In[16]:=

```
Show[
ParametricPlot3D[
Evaluate[KONOID1[x,y]],
{x,-2Sqrt[2],2Sqrt[2],.15},{y,0,8,8}],
%14,
Boxed->False,Ticks->False,Axes->False,
ViewPoint->{-3,3,3},
ColorOutput->L,Background->RGBColor[1,1,.7] ]
```



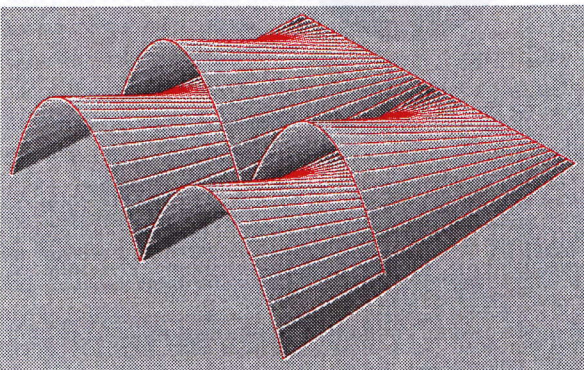
Out[16]=

-Graphics3D-

Kao ilustracija primjene ove plohe može poslužiti:

In[17]:=

```
ParametricPlot3D[{ {x,y,(-.5x^2+4)/8 y},
{x+4Sqrt[2],y,(-.5x^2+4)/8 y},
{x,y-4,(-.5x^2+4)/8 y},
{x+4Sqrt[2],y-4,(-.5x^2+4)/8 y} },
{x,-2Sqrt[2],2Sqrt[2]},{y,0,8,8},
Boxed->False,Ticks->False,Axes->False,
ViewPoint->{-3,3,3},
ColorOutput->L,Background->RGBColor[1,1,.7] ]
```



Out[17]=

-Graphics3D-

Primjer 5

Konoid je zadan

kružnicom ($z = 0$, $x^2 + y^2 = 25$),

pravcem ($y = 0$, $z = -x + 5$), te

direkcijskom ravninom ($x = 0$).

Treba prikazati dio konoida omeđen ravninama

$z = 0$, $z = 6$ i $x = 3$.

Rješenje :

U svakoj ravnini $x = k$, $k \in (-5, 5)$ leže dvije izvodnice konoida.

To su spojnice točke $(k, 0, 5-k)$, koja leži na zadanom pravcu, s točkama

$(k, (25-k^2)^{1/2}, 0)$ i $(k, -(25-k^2)^{1/2}, 0)$ na kružnici.

Zaključivanjem kao u prethodnom primjeru dobivaju se jednadžbe

$y = \pm(25-x^2)^{1/2} (x+z-5)/(5-x)$ dviju grana konoida.

Sada se mogu napisati parametarske jednadžbe.

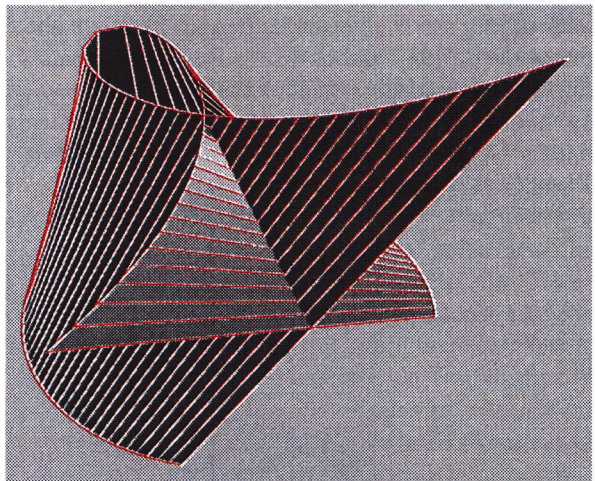
In[18]:=

```
y[x_,z_]:=If[x!=5,(z+x-5)Sqrt[25-x^2]/(5-x),0];
KONOID2[x_,z_]:=
{{x,Evaluate[y[x,z]],z},{x,-Evaluate[y[x,z]],z}}
```

a onda i naredba za crtanje.

In[20]:=

```
ParametricPlot3D[
Evaluate[KONOID2[x,z]],
{x,-5,3,.25},{z,0,6,6},
ViewPoint->{6,-5,7},
Boxed->False,Ticks->None,Axes->False,
ColorOutput->L,Background->RGBColor[1,1,.7] ]
```



Out[20]=

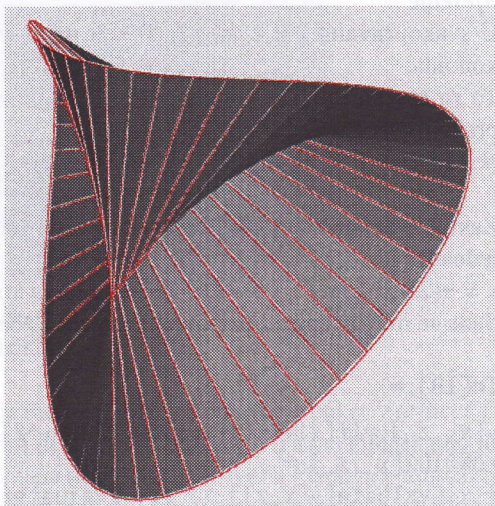
-Graphics3D-

Neke plohe, konstruktivno dosta teške, koje studentima stvaraju poteškoće pri crtanju i sagledavanju, imaju vrlo jednostavne parametarske jednadžbe. Tako je, naprimjer, u Mathematici posebno laka konstrukcija Plückerovog konoida.

Primjer 6

In[21]:=

```
ParametricPlot3D[{v Cos[u], -3 Cos[2u], v Sin[u]},
{v, 0, 4, 4}, {u, 0, 2 Pi, Pi/32},
Boxed->False, Ticks->None, Axes->False,
ViewPoint->{-1.3, 3, 2},
ColorOutput->L, Background->RGBColor[1, 1, .7] ]
```



Out[21]=

-Graphics3D-

U skupinu "laganih" za ParametricPlot3D spadaju i sve vrste zavojnih ploha.

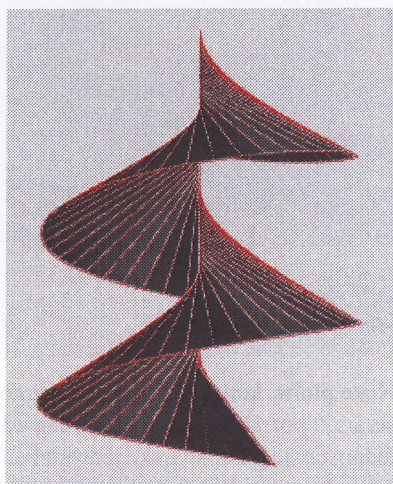
Primjer 7

Zavojnica na uspravnom valjku dana je parametarskim jednadžbama $x = 5 \cos u$, $y = 5 \sin u$ i $z = u$.

Zavojnim gibanjem pravca, koji zavojnu os siječe pod kutom $\arctan(5/3)$, nastaje kosa zavojna ploha.

In[22]:=

```
ParametricPlot3D[
{v Cos[u], v Sin[u], -3/5 v + u + 3},
{u, -1.5 Pi, 2.65 Pi, Pi/20}, {v, 0, 6, 6},
Axes->False, Ticks->None, Boxed->False,
ViewPoint->{1.5, -2.5, -.5},
ColorOutput->M, Background->RGBColor[1, 1, .7] ]
```



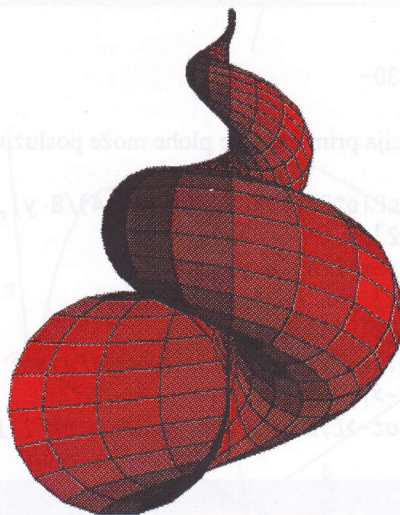
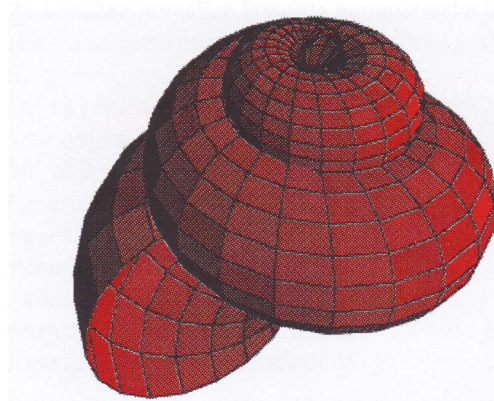
Out[22]=

-Graphics3D-

Odavde se vrlo lako skreće u igru s "puževima".

In[23]:=

```
GraphicsArray[{ParametricPlot3D[{u(Sin[v]+1)Cos[u],
u(Sin[v]+1)Sin[u], u Cos[v]-u^2/8},
{u, Pi, 6 Pi, Pi/10}, {v, 0, 2 Pi},
ViewPoint->{1, 2, 2},
Axes->False, Ticks->None, Boxed->False,
ColorOutput->K},
ParametricPlot3D[.5u(Sin[v]+1)Cos[u],
.5u(Sin[v]+1)Sin[u], .5u Cos[v]-2u},
{u, Pi/4, 5 Pi, Pi/8}, {v, 0, 2 Pi},
ViewPoint->{0, -2, -.5},
Axes->False, Ticks->None, Boxed->False,
ColorOutput->K}]}]
```



Out[23]=

-GraphicsArray-

U ovom se paketu mogu koristiti i naredbe *SphericalPlot3D* i *CylindricalPlot3D* koje su za neke slučajeve (o njima, možda, drugom prilikom) pogodnije od *ParametricPlot3D*.

Pomoću paketa 'Animation' svaka se grafika na ekranu može pokrenuti.

Ako se ni ne spomenu prednosti Mathematice pri izvođenju jednadžbi ploha, za drugu priliku mogu ostati njihovi grafički prikazi pomoću 'ContourPlot3D', projekcije pomoću 'Graphics3D' i tako dalje, i tako dalje...

Treća dimenzija za mase

MIROSLAV AMBRUŠ-KIŠ

(Nove Appleove tehnologije približavaju 3D oblikovanje i interaktivnost u realnom vremenu na računalima skromnijih mogućnosti)

Kompjutorski programi u kojima je moguće generirati slike trodimenzionalnih objekata i prostora, stavljati ih u međusobne odnose, *odijevati* ih u plašteve različitih tekstura prirodnog izgleda, podvrgavati ih različitoj rasvjeti i mijenjati očišta stvarajući animacije u kojima se kreću i objekti i očište, donekad su bili u domeni vrlo brzih i vrlo skupih računala i programa koji su se na njima odvijali, kao i sofisticiranoga softvera kojim se nije mogao služiti svatko, ili — baš svatko.

Problemi s računalnom snagom i resursima računala nastajali bi već kada bi na zaslonu trebalo generirati i obične primitivne oblike poput kugle, stošca, valjka, kvadra, kocke, prizme u jednostavnom žičanom modelu. Onda davno tome ne bi trebalo biti tako, ponajviše zahvaljujući procjeni tvrtke Apple kako bi se isplatilo osmisliti racionalan sistemski softver koji bi podržavao 3D grafiku na razini samog računala, a aplikacije bi se bavile samo specifičnim primjenama. Prije nešto više od godine dana Appleovi softverski tehnolozi su softverskim tvrtkama predložili dvije nove tehnologije: QuickTime™VR i QuickDraw™3D. Prvobitna namjena tih dviju tehnologija bila je da se postave standardi za trodimenzionalno prikazivanje na Internetu i za — kompjutorske igre (!). Pokazalo se da su te tehnologije, suprotno očekivanju, najprije usvojili proizvođači profesionalnog softvera u trodimenzionalnom oblikovanju, te je Apple ubrzo bio suočen sa zahtjevima da se ti, iznimno racionalni, dodaci sistemskom softveru dorade i unaprijede tako da bi što bolje odgovorili zahtjevima profesionalne, akademske i istraživačke skupine korisnika.

MACINTOSH OS, SISTEM NA SKLAPANJE

Da bi se pokazala stvarna vrijednost tih inovacija potrebno je ukratko objasniti širem krugu korisnika manje poznate specifičnosti Mac OS-a, operativnoga sistema koji pokreće i integrira korištenje računala Apple Macintosh i Power Macintosh.

Osnovni softverski skup kojim se pokreće rad pojedinoga računala, a koji upravlja radom svih komponenti računala i omogućava korištenje aplikativnoga softvera, naziva se radni, operativni sistem računala. Od godine 1984. kada je Apple promovirao računalo Macintosh, tvrtka ustraje na što većoj integraciji sličnih resursa, koji se koriste u različitim aplikacijama, upravo na razinu OS-a. Jedna od prvih velikih inovacija unutar toga koncepta bilo je integriranje fontova, pisama, na razinu sistema. Na svim računalima do tada, svaki program koji se manje ili više bavio tekстом, koristio je svoja vlastita pisma. Na Macintoshu su svi programi koristili ista pisma koja bi se instalirala kao zajednički resurs. Revolucija stolnoga izdavaštva počela je kada su prevladala vek-

torska, skalabilna pisma, pa se to računalo moglo početi koristiti i u dizajnu, jer se na resursima za pohranu podataka moglo instalirati onoliko pisama koliko je odgovaralo kreativnim potrebama dizajnera. Druga temeljna inovacija unutar toga načela bila je ona koja je omogućila radni postupak koji danas poznajemo kao *kopiraj-i-zalijepi*, odnosno, omogućila je razmjenu podataka između više dokumenata i aplikacija bez potrebe za nimalo ergonomskom manipulacijom spremanja podataka, te višekratnoga pokretanja i napuštanja pojedine aplikacije.

Kako se Appleov koncept pokazao ispravnim, jer je i strojeve i ljude činio produktivnijima, ostalo mu je da istraje na tom konceptu i u njega integrira sve više resursa. Ostalim proizvođačima je preostalo tek da tu strategiju kopiraju s manjim ili većim uspjehom i zaostajanjem za kalifornijskom tvrtkom. Osim prijenosa teksta i slike, te dijeljenja zbirke pisama, Apple je ubrzo integrirao i zvuk, a tehnologijom QuickTime™ prije pet godina na razni sistema integrirana je i video slika s tonom.

Druga, manje spektakularna ali time ništa manje važna Appleova inovacija u sistemskom softveru je po tome što je jezgri MacOS-a omogućio naknadnu modularnu dogradnju. Tako se svaka inovacija može potpuno lako dodati, a ne prođe li test realne upotrebe u masovnih korisnika, takvi dodaci lako se uočavaju i uklanjaju. Potvrđene i globalno usvojene tehnologije se potom integriraju u sistem. Danas je svako računalo Macintosh opremljeno sistemom koji podržava audio i video tehnologiju, no, svaki korisnik koji računalo namjerava koristiti u neku specijaliziranu svrhu može se lako i jednostavno odreći tih ili drugih dodataka koji su nepotrebni za svakodnevni rad, oslobađajući dodatne resurse (procesorsku snagu, radnu memoriju i prostor na medijima za pohranjivanje podataka) za stvarne potrebe.

QUICKTIME™ I QUICKTIME™VR

Jedan od velikih tehnoloških prodora, prvenstveno na polju multimedije, jest tehnologija QuickTime. Ona se bavi dinamičnim zvukovnim i video podacima koji se bezuvjetno moraju izvoditi u realnom vremenu. Iako je sama statična slika u boji iznimno zahtjevan medij koji znatno iscrpljuje procesorske i resurse za pohranjivanje, Apple je uspio razviti brze algoritme za kompresiju koji istodobno zadržavaju prihvatljivu kvalitetu slike i zvuka, omogućavajući da se one zadovoljavajućom brzinom učitavaju i smjenjuju na ekranu stvarajući iluziju pokretne slike i zvuka u realnom vremenu. Dokument koji sadrži dinamičnu sliku i zvuk zove se QuickTime film (Movie), a postoje brojni programi u kojima se ti podaci reproduciraju. Svi rade na jednostavnom načelu "play", "rewind", "fast forward" i "pause" — reprodukcije poznate iz rada audio i videokasetama. Štoviše, unu-

tar linearnih QuickTime filmova moguće je do pojedinih dijelova dolaziti skokom, koji je prema korisniku izveden u metafori kliznoga potencijometra kojega se može proizvoljno postaviti na bilo koji linearni dio audiovizualne sekvencije.

Za razliku od osnovnog QuickTimea, gdje se audiovizualni podaci u načelu izvode slijedno (sekvencijalno), QuickTime VR (VR kratica je za *Virtual Reality*, virtualna stvarnost) je format QuickTime filma kojega korisnik odmeta proizvoljno.

Klasični QuickTime obrazac kompresije podataka i način njegova izvođenja u realnom vremenu poslužili su da izvođenje QTVR "filmova" bude uopće moguće, ali uz nove zahtjeve koji su znatno drukčiji od sekvencijalnog pregledavanja videospotova.

QuickTime VR filmovi pojavljuju se u dva osnovna oblika: *ambijentalni* i *objektni*. Ambijentalni filmovi zapravo su panoramske montaže statičnih slika s "bešavnim" spojevima slike: vodoravno u punih 360 stupnjeva, a uspravno do 220 stupnjeva. Očište promatrača je u središtu panorame, a metafora kursora pomaže u orijentaciji, proizvoljnom "osmatranju", osvrtnanju unutar ambijenta. Takve panorame generiraju se sintetički iz raznih 3D programa, ili se sklapaju iz serija panoramskih fotografija. Unutrašnji programski "motor" za kreiranje QTVR filmova pomoći će korisniku da slike bešavno spoji u cjelovitu panoramu.

Osim kursora koji u osam osnovnih pravaca pomaže navigaciji unutar ambijentalnoga tipa QTVR filma, postoji i oblik izlaznoga kursora koji detektira izlazne točke u panorami. Izlazne točke su mjesta gdje je moguće "preskočiti" iz jedne panorame u drugu. Pozicije izlaznih točaka, kao i u koju se panoramu prelazi postavlja sam kreator panorame.

Jedno od subjektivno najzanimljivijih svojstava ambijentalnog QTVR formata filma jest što se u njemu kod izvođenja u kutovima kadra generira jastučasta aberacija, deformacija koja sugerira pokret u periferiji vidnoga polja. Jedna od prema korisniku ljubaznih opcija jest da se prilikom izvođenja ambijentalnoga QTVR filma intenzitet toga efekta može dozirati, ili ga se može potpuno ukloniti. Također je zanimljiva karakteristika filmova toga tipa što omogućavaju korištenje zum efekta (približavanja i udaljavanja) čime se istraživanje virtualnoga ambijenta doima još realističnijim. U ambijentalnom QTVR formatu također postoji druga vrst interaktivne točke, koju se detektira promjenom kursora u simbol ljudske šake. Metafora korisničkoga sučelja tim rješenjem sretno u predjelima krajolika najavljuje izlaznu točku u drugi oblik QTVR filma, *objektni* oblik.

Izabiranjem takve točke obično se "rukom" (pokazivačem) dohvati kakav predmet.

Za razliku od ambijentalnog QTVR filma, u kojemu se oko statičnoga očišta zapravo rotira panoramski plašt, u objektnom obliku se rotira očište u jednoj ili dvije ravnine definirane kružnom putanjom od 360 stupnjeva. Manje egzaktno, a više opisno, taj bi se doživljaj mogao opisati kao mogućnost proizvoljnoga rotiranja objekta

oko svih osi (i svih njihovih međuvrijednosti) unutar pravokutnoga kadra. Tako se rukovanjem filmom globusa snimljenim u objektnom obliku može svaku zemljopisnu koordinatu dovesti u središte prikaza.

Minimalna specifikacija za kompoziciju jednog panoramskog filma jest osam vertikalnih kadrova, slika snimljenih standardnim 35 milimetarskim (leica) fotoaparatom s blagim širokokutnim objektivom od 35 milimetara čiji je kut snimanja 45 stupnjeva.

QuickTime™VR odmah su po objavljivanju svesrdno prihvatile softverske tvrtke koje izdaju softver za arhitektonsko, urbanističko i topografsko projektiranje, poput mađarske tvrtke Graphisoft, jer su QTVR filmovi unijeli bitnu realističnost i interaktivnost (s proizvoljnim kretanjem unutar realistično generiranih ambijenata) u prezentacije gotovih arhitektonskih i urbanističkih projekata. Tako se kroz pojedine tek projektirane zgrade može proizvoljno "šetati", može ih se "obilaziti" i bez teškoće razgledati sa svih strana, ne osjećajući pritom teškoće u realnom vremenu na kojima ostali programi zapinju prilikom izračunavanja sjenčanja i izgleda tekstura. U Graphisoftu su posebno zadovoljni jer se sintetičkim računalno generiranim krajolicima i objektima mogu pridodati i prirodni elementi pejzaža kao što je biljni pokrov, oblaci, elementi morfologije terena i postojeći (fotografirani) objekti u koje se projekt interpolira. Moguće je provjeriti i na projektiranim objektima prezentirati dinamiku sunčevih faza u pojedinim dijelovima dana i godine.

Posebno je zanimljiva bila reakcija raznih tvrtki koje se bave prodajom potrošačke robe putem Interneta. Klijent, isključivo koristeći vlastito računalo, može "učiti" u ambijent njihove stvarne (fotografirane) ili virtualne (sintetički generirane) trgovine, može temeljito "dirati" i sa svih strana razgledati robu koja se prodaje i, dakako, kreditnom karticom platiti ono što će mu biti isporučeno putem neke kurirske službe.

QuickTime™VR su vrlo glatko prihvatili i autori računalnih igara, kao i multimedijalni umjetnici koji su dobili programsku alatku kojom mogu kreirati realistične i nadrealistične (na žalost, za sada samo statične) interaktivne ambijente i objekte.

Zanimljivost: kada se jedan QuickTime™VR film pokrene programom za reprodukciju sekvencijalnih, običnih QT filmova, klizač kojim se proizvoljno "premotava" film na početak ili na kraj zatječe se "na sredini" filma. Potezanjem klizača ambijentalnoga filma prema "početku" rotiraju se osi očišta za 180 stupnjeva na lijevu ili na desnu stranu. Objektni oblik QTVR filmova program reproducira kontinuiranim rotiranjem objekta po obje osi za 360 stupnjeva.

Važna napomena: za realistično izvođenje QuickTime VR filmova dovoljno je računalo skromnih kapaciteta klase PC na procesoru 386 ili Macintosh na procesoru Motorola MC 68030 na taktu od 16 MHz, s tvrdim diskom ili CD ROM-om, bez ikakvih hardverskih dodataka.

Od tehnologija iz područja multimedije, Apple još radi

na tehnologiji QT Conferencing, koji bi na jeftinim računalima u potrošačkom razredu cijena omogućavao videokomunikaciju između umreženih računala i na Internetu, pa i — uz ostale primijenjene tehnologije — suradnju pri tmskom oblikovanju 3D objekata u realnom vremenu.

QUICKDRAW™3D

Za razliku od QuickTime™VR, koji je izveden iz već postojeće mlade multimedijalne tehnologije, QuickDraw™3D je tehnologija nastala od nule. QuickDraw je u Appleovoj nomenklaturi tehnologija koja upravlja prikazom slike na ekranu, bojom, bitmapiranim i vektorskim 2D objektima na razini sistema, te ispisom na pisačima. Format dokumenta, zajednički svim programima koji podržavaju postupke kopiraj-i-zalijepi (Copy/Paste) i potegni-i-ispusti (Drag and Drop), je PICT. To je interni Appleov format koji zbog raznih razloga, od kojih je glavni unutrašnja softverska organizacija Appleovih računala, nije mogao zadovoljavajuće biti proširen na druge platforme bez neprihvatljive razine gubitka informacije. Analogan, ali ne posve podudaran, format u svijetu MS Windowsa i računala na Intelovim procesorima jest *.WMF (format Windows Meta File). Tehnologija QuickDraw™3D nema nikakvoga uzora na nekoj drugoj računalnoj platformi. Razvoj događaja vjerojatno upućuje kako će ta tehnologija biti prihvaćena i na računalima koja rade pod Windowsima, i pod Unixom, jer Apple, osim za PowerMacintosh, usporedno razvija tu tehnologiju i za druge platforme računajući na njihovu potpunu kompatibilnost i na univerzalnost računala koja mogu pristupiti Internetu, jer se Apple pridružio tvrtkama Netscape Communications i Silicon Graphics koje razrađuju vjerojatni standard prikazivanja trodimenzionalnog na Internetu VRML (Virtual Reality Modeling Language). QuickDraw™3D, međutim, neće raditi na običnim Macintoshima, proizvođenima do ove godine, a koji su zasnovani na Motorolinim procesorima MC 680x0.

Računalna 3D grafika oduvijek je patila od nedostatka konzistentnoga formata koji bi bio razmjenjiv između pojedinih aplikativnih programa i različitih računala. Pri takvim teškoćama nitko u razvoju sistemskog softvera nije stigao razmišljati i o lakoći korištenja tzv. običnih korisnika. Šest mjeseci nakon što su QuickDraw™3D tehnologija i komercijalni produkti nezavisnih proizvođača softvera i hardvera predstavljeni javnosti (i kupcima) može se govoriti ne samo o punom uspjehu, nego i o vrlo brzom Appleovom reagiranju na želje partnerskih tvrtki i tržišta za unapređenjem ove tehnologije.

QuickDraw™3D omogućava, na razini OS-a, osnovni komplet alatki za kreiranje i dotjerivanje (editiranje) primitivnih trodimenzionalnih oblika (kugle, stošca, piramide, kvadra, kocke, prizme, torusa), a biblioteci osnovnih oblika uvijek se može dodati novi, kasnije izgrađeni geometrijski oblik. Budući da je taj dio tehnologije moguće dograđivati, proizvođačima softvera omogućeno je da, imajući u vidu tržišnu profilaciju svo-

jega proizvoda, u vlastitom aplikacijskom softveru te alatke dopunjavaju i modificiraju. Programerima je upućena specifikacija o tome kakav je sustav interakcije s 3D objektima predviđen, i kako se unutar standarda trebaju pisati dopune, pa će rukovanje 3D objektima biti konzistentno u svim aplikacijama koje podržavaju tu tehnologiju. Ergonomski i andragoški gledano: ako ste naučili osnove korištenja tehnologije QuickDraw™3D na razini OS-a, svaku novu aplikaciju koja je primjenjuje već ste savladali s 90 posto jer na upoznatu podlogu valja usvojiti samo specifične razlike. Isto tako, držeći se specifikacija lako je proizvesti u potrošačkom cjenovnom razredu i hardverske dodatke poput ubrzivačkih kartica, trodimenzionalnih miševa, tablica za crtanje/digitalizaciju i jeftinih igračkih upravljačkih palica.

QuickDraw™3D je postavio i standardni zajednički format 3DMF (što je skraćenica za 3D Meta File) tako da se između aplikacija, sistema i platformi koje podržavaju taj standard mogu razmjenjivati gotove datoteke, bez obzira jesu li one kao takve spremljene na neki od medija za pohranu (diskove) ili se iz jedne u drugu aplikaciju prenose postupcima kopiraj-i-zalijepi (Copy/Paste) i potegni-i-ispusti (Drag and Drop). Dosadašnji zajednički format DXF (Drawing Interchange File) najmanji je dosadašnji zajednički nazivnik za datoteke trodimenzionalnih objekata. Putem njega iz jednog u drugi program za modeliranje i sjenčanje može se prenijeti samo oblik objekta, a ne i njegove pojavne karakteristike. Format 3DMF ne samo što omogućava prenošenje i drugih karakteristika 3D objekata poput teksture, sjenčanja, prozirnosti materijala iz kojih su građeni i karakteristika postavljenje rasvjete, nego je i znatno manje zahtjevan prema resursima od formata DXF: prostoru na disku, radnoj memoriji i procesorskoj snazi, što se izravno odražava na produktivnost i brzinu izvođenja na računalima. Također, u formatu 3DMF definiran je način konstrukcije, modeliranja trodimenzionalnih objekata, njihova geometrija. Jedno i drugo omogućit će, što je do sada bilo moguće samo sa zvukom i QuickTime filmovima, da svoj 3D model zalijepite u program za obradu teksta kao ilustraciju, te da on bude potpuno funkcionalan za razgledanje i rotiranje oko svih osi. Dakako, moguća je razmjenjivost podataka i između mnogo snažnijih aplikativnih programa.

QuickDraw™3D poznaje tri osnovna oblika pojavljivanja 3D objekata: žičane modele (s ili bez vidljivih zaklonjenih bridova), grubo sjenčane i sjenčane po Gouraudovu algoritmu. Sistemski ugrađeni algoritmi za tvorbu pojavnosti trodimenzionalnih objekata učinit će popravljavanje (editiranje) mogućim u realnom vremenu i na potpuno sjenčanim objektima. Do sada se taj postupak obavljao na žičanom modelu, a sjenčanu statičnu sliku na osobnim računalima valjalo je pričekati dok je procesor izračuna. Pogreške i pogrešne procjene obično bi korisnika "kaznile" neugodnim ponavljanjem i čekanjem sjenčanja u novom postavu. Profesionalne korisnike obično bi izdalo strpljenje i počeli su razmišljati o znatno snažnijim i neproporcionalno skupljim računalima

na kojima se faze modeliranja i sjenčanja znatno brže izmjenjuju. Specifikacija tehnologije QuickDraw™3D omogućava i izvedbu hardverskih dodataka za ubrzanje iscrtavanja sjenčanih objekata, pa će tako biti moguće i uz minimalne troškove dogradnje računala u realnom vremenu rukovati vrlo kompleksnim objektima odjevenim u vrlo složene teksture, s različitim stupnjevima prozirnosti objekata i neprozirnosti atmosfere. Prve tri ubrzivačke kartice na tržištu bile su, svaka, jeftinija od 200 dolara, neke među njima i znatno jeftinije. Na tom se polju mogu očekivati veliki prodori i prema većim ubrzanjima i prema nižim cijenama, kao i odluke proizvođača računala da takve dodatke standardno isporučuju s računalima.

Format QuickDraw 3DMF osim strukture, svih aspekata pojavnosti, podržava i neke pomalo neočekivane dopunske podatke poput zvukova povezanih s pojedinim objektom. Ako se, npr. uz realistično oblikovan drveni kolski kotač poveže zvuk kotača kojemu cvili osovina, on će taj zvuk proizvoditi prilikom pobuđivanja toga objekta. Čak i ako se u pojedinim aplikacijama pojedini objekti pokrenu, dopune i izmijenjeni spremne na disk, uz pridodane podatke ostat će sačuvani podaci koji se nisu mogli izvoditi u programu s rudimentarnijim mogućnostima.

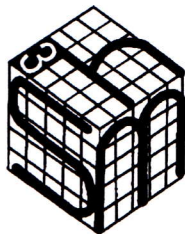
Ta tehnologija je, u korijenima, najprije bila namijenjena interakciji na Internetu i korištenju u računalnim igrama. Igrama bi — posebno u sprezi s tehnologijom QuickTime™MVR — donijela novu kvalitetu u realističnosti. Mimo Appleovih očekivanja, reagirali su brojni proizvođači specijaliziranoga softvera, akademskog, znanstvenog, animacijskog, konstrukcijskog, jer im prva verzija QuickDraw™3D tehnologije nije pružala željenu preciznost, iako su tu tehnologiju snažno željeli primijeniti.

Apple je ubrzo morao revidirati svoj jaki motiv, da ta tehnologija bude radikalno nezahtjevna zbog računala relativno skromnih mogućnosti i zbog niske propusnosti Interneta. Ni šest mjeseci nakon izlaska prve verzije, Apple je na opće zadovoljstvo izdao verziju 1.5 QuickDrawa 3D. Nova verzija učinila je internu arhitekturu te tehnologije još modularnijom, i dopušta, među ostalim, dodavanje mnogih sofisticiranijih tehnika sjenčanja. Specifikacija za sve aplikativne programe, bili oni bazični ili vrlo složeni i profinjeni, sada dopušta dopunjavanje svih programa standardnim dodatnim programskim modulima (plug-inovima). Nova verzija podržava i novi datak biblioteci primitivnih geometrijskih oblika nazvan *trimesh*. On omogućava još brže sjenčanje objekata. Također, znatno je ubrzano prikazivanje trodimenzionalnih objekata s obzirom na njihovu virtualnu udaljenost od prednjega plana radnoga prostora: udaljeniji objekti iscrtavaju se na ekranu s manje poligona, a kada se objekt približi, softver ga automatski generira od više poligona. Poboľšano je rukovanje memorijom. Pod ranijim verzijama (1.0 i 1.1) programi su držali u memoriji po dvije pune verzije stanja istoga objekta, a sada je dovoljna samo jedna. Nova verzija temeljno podržava i

animaciju objekata, pa je znatno lakše kreirati aplikativni softver u kojima se objekte može vezati uz putanje i druge algoritme animacije. Osnovnom zahtjevu o većoj preciznosti rada Apple je odgovorio aritmetikom s mogućnošću izbornog rada s pet znamenki više nego prije. Iako će u razvojnim odjelima svi zainteresirani proizvođači softvera morati svoje programe prilagoditi unaprijedenoj tehnologiji, na taj se zahtjev među "profesionalcima" nitko ne žali. Naprotiv, promjene su dočekanе aklamacijom, a među tvrtkama u pohvalama prednjače *Strata, Specular International, Electric Image, Fractal Design, Graphisoft* i *Wolfram Research* koji su odmah najavili unapređenje svojih osnovnih softverskih paketa i nekih novih. Začudo, tvrtka Autodesk, koja je na Macintosh platformi okušala sreću s AutoCADom 12, pa se povukla, znakovito šuti.

QuickDraw™3D u svakom slučaju čini snažnu međuplatformsku okosnicu oko koje se vrlo lako i djelotvorno pišu nove aplikacije za mnoge računalne platforme. Nova tehnologija nije ni izdaleka prišla svom zenitu, ali je potpuno sigurno da je učinila da vlasnici osobnih računala počnu razmišljati o korištenju mogućnosti dojučer rezerviranih za skupe radne stanice poput Silicon Graphicsovih, a tvrtke i ustanove koje si nisu mogle priuštiti ta skupa računala sada mogu ozbiljno, još jednom i realističnije razmisliti o nabavci računala za ambicioznije primjene na polju 3D grafike.

Vijesti, izvješća i najave



SUSRET NASTAVNIKA MATEMATIKE

U Zagrebu je od 27. do 29. lipnja 1996. održan 3. susret nastavnika matematike Republike Hrvatske. Susret je organiziralo Hrvatsko matematičko društvo pod pokroviteljstvom Ministarstva prosvjete i športa.

Rad susreta sastojao se od predavanja i priopćenja koja su bila namijenjena nastavnicima osnovne, odnosno srednje škole. Održan je i okrugli stol o obrazovanju nastavnika matematike.

Velik broj sudionika iz svih dijelova Hrvatske, njih 667, govori o zainteresiranosti nastavnika matematike za ovakav oblik rada i druženja. Sva predavanja i priopćenja tiskana su u Zborniku radova. Bilo bi pogrešno na ovom mjestu isticati neka od njih budući da selekcija ovisi o osobnoj sklonosti. Ipak, teško je zaobići predavanje prof. V. Devidéa "Matematika u grafici M. C. Eschera".

Jelena Beban-Brkić

OSVRT NA JEDAN "KRNJI" STOL

U programu 3. susreta nastavnika matematike Republike Hrvatske bilo je predviđeno i održavanje okruglog stola s temom "Obrazovanje nastavnika matematike". Stol je održan, iako je voditelj bio odsutan. Ta činjenica, kao i nevođenje zapisnika te sukladno tome neinformiranje ostalih sudionika susreta o mišljenjima, prijedlozima i zaključcima okruglog stola, glavni su nedostaci i zamjerke organizatorima.

Sudionici okruglog stola informirani su o nastavnim programima studija

matematike po godinama i usmjerenjima. (Valja napomenuti da je na PMF-u tiskana posebna knjiga u kojoj su navedeni spomenuti programi.) Pritom je naglašeno, a to smatram važnom informacijom, da novi prijedlog, za razliku od dosadašnjeg, obiluje mnoštvom izbornih kolegija, posebno onih koji obrađuju geometrijske sadržaje. Ta se činjenica obrazlagala općepoznatom konstatacijom o nedostatnosti geometrije u nastavi srednjih škola. Moja je primjedba bila da se nedostatak mogla ublažiti uvođenjem geometrijskih kolegija ne kao izbornih predmeta nego kao obaveznih. Ovako je stvar prepuštena slučajnom izboru studenata, što ne obećava neko značajnije poboljšanje na tom planu.

Druga je, isto tako važna informacija, na koju želim posebno upozoriti, da trenutno nedostaje oko 300 profesora matematike, što bi trebao biti signal barem za ozbiljnu zabrinutost, ako ne i za uzbunu. Moj je dojam da na PMF-u i u Društvu matematičara zasad ne postoji jasna strategija kako riješiti taj problem. Volio bih da se varam, ali sadašnje slabo zanimanje studenata za studij matematike i neadekvatan položaj profesora na društvenoj ljestvici, na što su ukazivali i sudionici okruglog stola, ostavljaju me u pesimističnom raspoloženju. Želio bih vjerovati da su predstavnici Ministarstva prosvjete i športa koji su prisustvovali susretima barem djelić ovog "raspoloženja" prenijeli svojim pretpostavljenima te da se povećanje nastavničke norme i broja učenika u razredima ne smatra rješenjem problema.

Damjan Jovičić

FIRST CROATIAN CONGRESS OF MATHEMATICS

MATEMATIČKI KONGRES

Od 18. do 20. srpnja ove godine u Zagrebu je održan 1. hrvatski matematički kongres (First Croatian Congress of Mathematics).

Organizatorima, Hrvatskom matematičkom društvu i Matematičkom odsjeku PMF-a valja uputiti sve pohvale za vrlo dobru organizaciju ovog velikog međunarodnog skupa matematičara.

Rad kongresa odvijao se u tri sekcije, kroz pozivna predavanja i petnaestminutna izlaganja čiji su sažeci objavljeni u Zborniku.

Dvoje je članova našega društva sudjelovalo u radu kongresa. Miljenko Lapaine izložio je svoj "Prilog bibliografiji Stjepana Horvata", a Zdravka Božikov referirala je o svom radu "Simetrični dizajni s parametrima (69, 17, 4) i F_{39} kao grupa automorfizama", u kojem su klasificirani svi takvi dizajni invarijantni u odnosu na Frobeniusovu grupu reda 39.

Zdravka Božikov

MEDIA-SCAPE 4 Zagreb '96

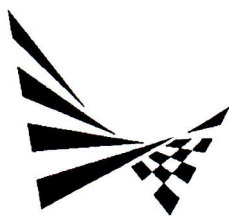
MEDIASCAPE 4

Pod gornjim naslovom u Zagrebu je od 5. do 11. listopada 1996. godine, u nimalo nenamjerno odabranom terminu održavanja sajma Info '96, održano četvrto izdanje skupa MediaScape.

MediaScape je zapravo konglomerat događanja koji na različite načine propituje definicije novih medija zasnovanih na računalnoj tehnologiji i interaktivnosti.

Ove godine je, pod egidom *NoWare, NoWhere, KnowWhere, KnowWare*, u Galeriji suvremene umjetnosti na Katarinskom trgu održana izložba fotografije, video-instalacija, arhitekturnih slikarija, instalacija s autorskim konstrukcijama elektroničkih glazbala. U Klubu arhitekata održavan je za sve vrijeme Međunarodni simpozij o medijima, umjetnosti i kulturi i prezentacije pojedinih multimedijalnih projekata izvedenih na računalima, CD-ROM-ovima i Internetu, te ambijentalni performansi. Sudionici događanja su manjim dijelom bili iz Hrvatske, tako da je službeni jezik događanja bio — engleski.

Miroslav Ambruš-Kiš



GODIŠNJA SKUPŠTINA HDKGKG

Dana 27. rujna 1996. održana je u Zagrebu (u Kačićevoj 26) godišnja skupština Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku kojoj je prisustvovalo petnaest članova.

U izvješću o aktivnostima Društva u protekloj godini govorilo se o sudjelovanju njegovih članova na skupovima u našoj zemlji i u inozemstvu te o uspješnoj pripremi i izlasku prvog broja časopisa. Izabrani su novi članovi Upravnog odbora, Nadzornog odbora i Izdavačkog savjeta.

Usvojen je plan rada Društva za iduću godinu koji, između ostalog, sadrži: organizaciju sljedećeg znanstveno-stručnog skupa, izdavanje novih udžbenika, razmjenu časopisa, suradnju sa znanstvenim i gospodarskim institucijama.

Istog je dana u poslijepodnevnom satima održan Znanstveno-stručni skup sa sljedećim izlaganjima:

Dr. Ivanka Babić i dr. Branko Kučinić
• Hiperbolička perspektiva

Mr. Miljenko Lapaine

• Znanstveni projekt "Kartografija i GIS"

Mr. Lidija Pletenac

• Plohe u interaktivnoj grafici

Mr. Ana Sliepčević

• Izvješće sa 5. seminara za računalstvo i geometriju (Kočovce, Slovačka)

• Prikaz udžbenika

Mr. Sonja Gorjanc

• Izvješće sa 7. međunarodne konferencije za inženjersku kompjutorsku grafiku i nacrtanu geometriju (Krakow, Poljska)

• O nekim algebarskim ploham 4. reda.

Vlasta Szirovicza

SEMINAR U SLOVAČKOJ

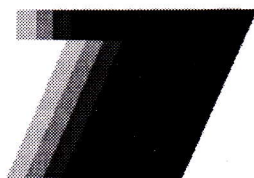
Od 4. do 6. rujna 1996. održan je 5. seminar iz računarske geometrije (5th Seminar on Computational Geometry) u Kočovcama u Slovačkoj. Na seminaru su aktivno sudjelovale dvije članice našeg Društva.

Mr. sc. Lidija Pletenac s Građevinskog fakulteta u Rijeci održala je zanimljiv referat "Experience with AutoCAD in Geometric Education", koji je bio popraćen malom izložbom kompjutorski izvedenih studentskih radova.

Mr. sc. Ana Sliepčević s Građevinskog fakulteta u Zagrebu predstavila je dva nova srednjoškolska udžbenika: V. Szirovicza, A. Sliepčević "Nacrtna geometrija - I. dio" i "Nacrtna geometrija - II. dio". Knjige su prihvaćene sa simpatijama, a pokazan je i interes za kupnju.

Uspostavljena je korisna suradnja s nastavnicima geometrije iz Austrije, Slovačke i Poljske.

Ana Sliepčević



7th ICECGDG

Cracow 1996

KONFERENCIJA U KRAKOWU

U Krakowu je od 18. do 22. srpnja održana 7. međunarodna konferencija za inženjersku kompjutorsku grafiku i nacrtanu geometriju (The Seventh International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry). Prethodne su konferencije održane u Kanadi (osnivačka, Vancouver 1978.), Kini (1984.), Austriji (1988.), SAD-u (1990.), Australiji (1992.) te Japanu (1994.). Sljedeća će se 1998. održati u Austinu (Texas, SAD).

Konferencija u Krakowu imala je izrazito međunarodni karakter. Ilustracije radi, Zbornik (Proceedings 1 i 2) sadrži radove sa svih kontinenata: 95 iz Evrope, 40 iz Azije, 16 iz Sjeverne Amerike, 7 iz Afrike, 5 iz Australije i

4 iz Južne Amerike. Brojnost sudionika iz Evrope, napose iz Poljske (44), uvjetovana je svakako mjestom održavanja.

(Dvije knjige radova sa skupa zasad kruže među članovima našega društva, ali ih svatko zainteresiran može dobiti na uvid u dogovoru s redakcijom.)

Niz interdisciplinarnih radova vezanih uz vizualizaciju i obrazovanje te nemali broj iz područja umjetnosti i matematike sadržajem su znatno iskoristili iz okvira utvrđenog nazivom ("za inženjersku kompjutorsku grafiku i nacrtanu geometriju"), što je potaklo organizatora sljedeće konferencije da predloži promjenu naziva u Međunarodna konferencija za geometriju i grafiku.

Širi smisao ovih međunarodnih susreta možda je najbolje opisao profesor Steve M. Slaby (Princeton University) u uvodnom izlaganju na otvorenju: "Našim promišljanjima i razgovorima utječemo jedni na druge na različite načine — intelektualno, društveno, kulturalno i psihološki. Prema tome, utjecaj ove naše konferencije nije ograničen samo na znanstveno-tehnološke pojedinosti. On nadilazi geometriju i grafiku iako toga možda nismo uvijek svjesni."

Konferencija je radila u tri sekcije (teorijska grafika i primijenjena geometrija, inženjerska grafika te grafička edukacija), u kojima je održano oko 140 petnaestminutnih izlaganja. Vjerojatno zbog širine sadržaja pojmovna *teorijska grafika i primijenjena geometrija*, prva je sekcija okupila najviše sudionika. Ponekad je radila i paralelno u dvije dvorane. Ako kažem da su u njoj prezentirani teorijski matematički radovi koji tretiraju raznovrsne probleme vezane uz kompjutorsku grafiku, radovi iz analitičke i konstruktivne geometrije, programiranja, primjene geometrije na rješavanje raznih problema u tehničkim disciplinama te radovi vezani uz likovnu umjetnost (bilo da je riječ o analizama umjetničkih djela sa stanovišta geometrije ili o "izložbama" slikarskih i kiparskih radova inspiriranih ljepotom geometrijskih oblika), sigurno sam nešto izostavila.

U sekciji *inženjerske grafike* moglo se vidjeti korištenje cijele palete kompjutorskih programa za crtanje u raz-

nim područjima tehnike, ponajviše arhitekturi i strojarstvu.

Sekcija *grafičke edukacije* obuhvaćala je također razne sadržaje, od prikaza rada sa studentima na nekim visokim školama i fakultetima, do planova i smjernica za nastavu geometrije i grafike u pojedinim državama, pa i na cijelim kontinentima, uključujući izlaganja nastavnika iz visokorazvijenih zemalja (SAD, Australija) koji rade sa sasvim malom djecom. Oni su posebno istaknuli da geometrijske oblike, kako ravninske tako i prostorne, djeci valja približiti putem prostoručnog crtanja i modeliranja u prirodnim materijalima. Očito je da se u njihovim zemljama neusporedivo jače osjećaju negativnosti masovne kompjutorizacije. U tom je smislu indikativno već spomenuto izlaganje profesora Slabyja, koji kaže: "Mnogi su od nas, barem u mojoj zemlji, postali poslužitelji strojeva i poučavaju studente kako da i oni to postanu." I dalje, citirajući profesora Garyja Bertolinea ("Sada industrija i obrazovanje slijede vodeće tvrtke, koje su dovele do pomaka u načinu razmišljanja i ponašanja."), nastavlja: "Obratite pažnju na to da su se ljudi koji se bave obrazovanjem našli na drugom mjestu. Postavlja se pitanje zašto bi edukatori trebali slijediti vodeće korporacije, čiji se tehnološki razvoj uglavnom temelji na znanju koje je rezultat akademskih istraživanja. Zašto korporacije ne slijede vodeće ljude iz obrazovanja? Možda je to zato što ljudi koji se bave obrazovanjem zane maruju svoju odgovornost glede rada na području teorijske geometrije i grafike, a previše vremena posvećuju tome kako da nauče primijenjivati alate koje su razvile korporacije, čiji osnovni interes nije obrazovanje, nego maksimaliziranje profita. U protivnom te bi korporacije davale veliku novčanu potporu akademskim istraživanjima u području geometrije i grafike. Nažalost, stvarnost je bitno drukčija."

Amerikanci su izložili najširu lepezu pogleda pa nije čudo da su i u zaključnim raspravama pojedini među njima zastupali krajnje polarizirana stajališta o razvoju struke. Jedni težište stavljaju na teorijska istraživa-

vanja, s naglašeno humanističkim pristupom nastavnom procesu, a drugi razvoj struke povezuju gotovo isključivo s tehnološkim napretkom. Konferencija u Austinu u tom pogledu mogla bi biti vrlo zanimljiva.

Ako se izuzmu domaćini, najbrojnija je bila delegacija Japana. Uz vrlo malo teorijskih radova oni su u sekcijama inženjerske grafike i grafičke edukacije vrlo dobro prezentirali široki spektar perfekcionistački razrađenih postupaka.

Poljaci, prvenstveno Krakowski tehnološki univerzitet, zaslužuju sve pohvale za uspješnu organizaciju. U gradu s jednim od najstarijih evropskih sveučilišta, vrlo su srdačno primili brojne sudionike konferencije. I letimičan pregled Zbornika pokazuje da se u Poljskoj značajan broj ljudi bavi geometrijom, kako teorijskom tako i njenom raznovrsnom primjenom.

Od ostalih evropskih sudionika valja istaknuti one iz Njemačke i Austrije. Mislim da su upravo njihovi odlično prezentirani radovi pokazali kako se inzistiranje na matematičkoj egzaktnosti može skladno povezati s njegovanjem tradicije lijepih geometrijskih slika i primjenom vrhunске tehnologije. Kako je meni osobno, a vjerujem i ostalim geometričarima na tehničkim fakultetima u Hrvatskoj, ovaj pristup našoj struci vrlo blizak, citirat ću ovdje nekoliko rečenica iz izlaganja profesora H. Stachela (Institut za geometriju Tehnološkog sveučilišta u Beču) sa svečanog otvaranja konferencije. U govoru programskog karaktera, koji se prvenstveno odnosio na nastavu nacrtne geometrije na tehničkim fakultetima u srednjoj Evropi, on kaže:

"...Posljednjih desetljeća u cijelom su svijetu ljudi koji se bave obrazovanjem u ovom području suočeni s tim da im predmet dolazi u pitanje, a kolegiji se skraćuju. Mi smo razvili uspješnu obrambenu strategiju pokazujući da poučavamo nešto što ima praktičnu vrijednost. Stoga smo počeli ukidati one dijelove teorije koji nisu bili očigledno primjenjivi. Za vježbe smo odabirali samo ono što je realno upotrebljivo. Počeli smo odbacivati mnoge impresivne ideje i lijepe slike zato što se činilo da nemaju nikakvo

značenje za inženjerski svijet..." Zalažući se za više teorije u obrazovanju inženjera, nastavlja: "...A što je obrazovanje? Grubo rečeno, obrazovanje je sve ono što studentu ostaje u sjećanju nakon što zaboravi veći dio informacija kojima smo mu punili glavu tokom studija.

Što bi moglo ostati od naših grafičkih kolegija? Trebala bi ostati sposobnost vizualizacije, kao i vještine poput prostoručnog skiciranja i rukovanja medijem. Očekujem, međutim, da naša nastava usto daje:

- snažan dojam o moći vizualizacije
- sposobnost zamišljanja idealnog svijeta geometrije te poznavanje njene terminologije
- osjećaj za logičku strogost
- možda i osjećaj za ljepotu geometrijskog razmišljanja, te
- kreativnost i otvorenost prema novim idejama...

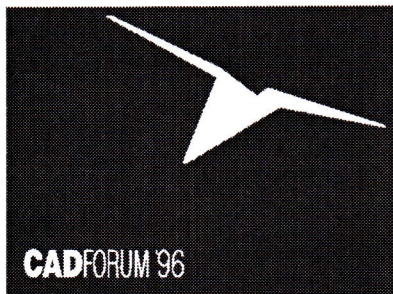
...Zašto ne bismo za kolegije odabrali teme koje bolje odgovaraju općim obrazovnim ciljevima, koje ostavljaju jači dojam i lakše se shvaćaju, koje snažnije potiču kreativnost studenata...

...Suviše se brinemo za primjenjivost. U čemu je upotrebljivost nekog umjetničkog remek-djela kao što je Leonardova *Mona Lisa* ili Mozartova *Čarobna frula*? Što čini praktičnu upotrebljivost bilo kojeg sjajnog atletskog dostignuća kao što je novi svjetski rekord u skoku u dalj? *Geometrija je intelektualna umjetnost i posebna vrsta kreativnosti ljudskoga uma.* Tako nadahnute rečenice o geometriji, izrečene već prvoga dana, otklonile su laganu depresiju koja me obuzela kao jedinu predstavnicu naše zemlje, čije je izlaganje usto dolazilo na red zadnji dan, i to kao predzadnje. Glavni je nedostatak ovoga termina što vam se kolege koje ste svojim izlaganjem eventualno uspjeli zainteresirati jednostavno ne stignu obratiti. Stoga radove, ako vam ime već nije poznato, valja slati što ranije. Naravno, uživala sam čuvši kako je nekima moja prezentacija bila najbolja u sekciji (dvorana s isključivo teorijskim radovima). Nažalost, mislim da je većinu brojnih pohvala izmamila grafička efektnost folija izrađenih pomoću programskog paketa Mathematica, čije velike grafičke mogućnosti nisu

ovdje gotovo uopće korištene.

I na kraju, mislim da bi za dobrobit naše struke vrijedilo nastojati, kad smo već propustili Krakow (u kojem je npr. susjedna Mađarska imala osam predstavnika), da nas u Austinu bude više.

Sonja Gorjanc



CAD FORUM '96

Ove će se godine po sedmi put u Zagrebu između 6. i 8. studenoga održati međunarodni znanstveni skup *CAD Forum* posvećen razvoju i primjeni kompjutorskih sustava u arhitekturi, dizajnu i prostornom planiranju, a u organizaciji CAD sekcije Udruženja hrvatskih arhitekata, Sveučilišta u Zagrebu i Zagrebačkog velesajma. Skup će biti komplementarni dio međunarodnog sajma informacijske tehnologije *Info '96* koji se održava na Zagrebačkom velesajmu od 5. do 9. studenoga.

Ovogodišnja tema skupa je "*Komunikacija u projektiranju*": Razlog za odabir ove aktualne teme je višestruk. O tome organizatori CAD Foruma u svojoj prvoj obavijesti kažu:

"Prostorno planiranje, projektiranje arhitekture i dizajn s raznih razina, u interdisciplinarnim stvaralačkim procesima, pripremaju intervencije u složeni sustav čovjekove umjetno stvorene okoline.

Preduvjet je svih stvaralačkih procesa s više sudionika komunikacija među njima, a i njihovi stvaralački dometi ovisni su o uspješnosti komunikacije. Rascijepljenost na različite odvojene struke sudionika s vlastitim jezicima, standardima i metodama te podijeljenost na različite odvojene faze od ideje i pripreme do same intervencije u okolinu i održavanja stanja potenciraju problem komunikacije. Primjena računala i elektroničkih me-

dija u stvaranju čovjekove okoline dosiže svoj puni smisao kada omogućuje prelazak s obrade odvojenih parcijalnih problema na integraciju raznorodnih dionica, stručnih priloga itd. te sa sekvencijalnog na usporedno odvijanje faza, a preduvjet za to je povezivanje i omogućavanje komunikacije u svim smjerovima na svim razinama.

Ostvarenje komunikacije računalsko-medijskim putem otvara međutim niz novih problema, koji mogu postati kočnice razvoja, kao npr.:

- problem zajedničkog jezika i pravila tj. standarda u komunikaciji
- problem permanentne edukacije
- problem zaštite stvaralačko-intelektualnih tvorevina (autorstvo, vlasništvo podataka, intelektualnih proizvoda, dokumentacije i sl.).

Eksplzivni razvoj tehničkih mogućnosti (razvoj računalskih i komunikacijsko-medijskih sustava, od razine internih mreža do globalnog cyberspacea) pritišće stvaraoce okoline da ga prate svojim nužnim doprinosom." Kako bi rasvijetlili aspekte ove teme, na CAD Forumu će se okupiti niz uglednih domaćih i stranih stručnjaka koji će prezentirati vlastita istraživanja i primjene na tom polju. Sve informacije o CAD Forumu mogu se dobiti kod gospođe Lidije Sekol u Zavodu za planiranje i zaštitu čovjekove okoline grada Zagreba, tel.: (1) 433 024, fax: (1) 274 796.

Bojan Baletić

PREDSTOJEĆI SKUPOVI

5.-9. 11. 1996.

CADFORUM '96, Komunikacija u projektiranju, 7. međunarodni simpozij o razvoju i primjeni kompjutorske tehnologije u arhitekturi, dizajnu i prostornom planiranju, Zagreb, Hrvatska.

5.-7. 2. 1997.

2nd MATHMOD VIENNA (IMACS International Association for Mathematics and Computation in Simulation), Technical University Vienna, Austria.

19.-21. 2. 1997.

Prvi hrvatski kongres o katastru, Hrvatsko geodetsko društvo, Zagreb, Hrvatska.

Lipanj, 1997.

5th Conference "Geometry & Computer", Gliwice, Poland
E-mail: geokpm@zeus.polsl.gliwice.pl

22.-28. 6. 1997.

ICC '97, 18th International Cartographic Conference with International Technical and Map Exhibits and a National Display of Historical Maps, Stockholm, Sweden.

21.-26. 9. 1997.

XIV. Österreichische Mathematikerkongress, Salzburg, Österreich.
<http://oemg.uibk.ac.at:180>

18.-27. 8. 1998.

Internationale Mathematik-Kongress 1998, TU Berlin, Deutschland.
<http://elib.zib-berlin.de/icm98>

Prikazi

V. SZIROVICZA I A. SLIEPČEVIĆ: NACRTNA GEOMETRIJA I. i II. DIO

Godinama se osjećao nedostatak dobrog srednjoškolskog udžbenika iz nacrtne geometrije. Od prošle školske godine to više nije tako. U nakladi po-



duzeća *Element* i Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku, uz odobrenje Ministarstva prosvjete i športa izašli su novi udžbenici "Nacrtna geometrija - I. dio" (1995.) i "Nacrtna geometrija - II. dio" (1996.), čije su autorice V. Szirovicza i A. Sliepčević članice našega društva. Knjige su namijenjene prvenstveno učenicima tehničkih škola i gimnazija i njihovim nastavnici-ma kao metodička pomoć.

"Nacrtna geometrija - I. dio" sadrži sedam poglavlja unutar kojih je detaljno i vrlo stručno obrađena Mongeova metoda projiciranja zaključno s presjecima uglatih tijela. U knjizi "Nacrtna geometrija - II. dio" obrađene su još tri metode projiciranja koje se koriste u nacrtnoj geometriji. Aksonometrija obuhvaća: kosu aksonometriju, ptičju projekciju, Eckhartov postupak i kosu projekciju. U poglavlju Perspektiva težište je stavljeno na metodu probodišta, jer se na taj način perspektiva povezuje s Mongeovom metodom projiciranja. Primjena perspektive obuhvaća prikaze objekta



ta postavljene na horizontalnu ravninu. U tećem je poglavlju obrađena kotirana projekcija i njena primjena. Jedna od bitnih karakteristika udžbenika je da su vrlo uspješno didaktički oblikovani. U svakom je poglavlju izlaganje sadržaja nastavne teme popraćeno nizom primjera, zadataka s uputama, komentarima i rješenjima te zadacima za vježbu, čija su rješenja na kraju knjige.

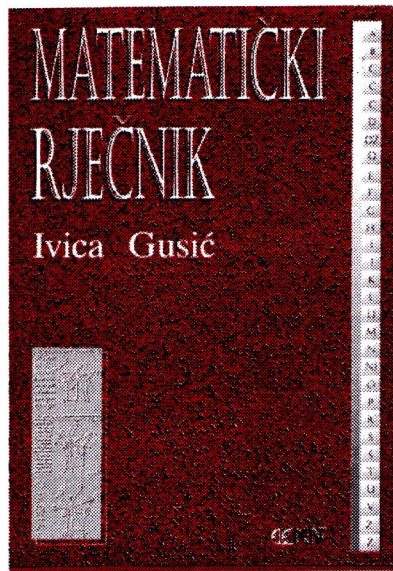
Udžbenici obiluju velikim brojem cr-

teža, koji su konstruktivno i tehnički precizno i lijepo izvedeni.

Ivanka Babić

IVICA GUSIĆ MATEMATIČKI RJEČNIK

U nakladi poduzeća *Element* iz Zagreba nedavno je tiskan *Matematički rječnik* mr. sc. Ivica Gusića. Iz predgovora saznajemo da rječnik pokriva matematičko gradivo koje se uči u osnovnoj i srednjim školama i djelomice



gradivo prvih godina matematičkog i srodnih fakulteta. Iako pretežno obrađuje pojmove elementarne matematike, dodiruje i osnove matematičke logike, matematičke analize, teorije vjerojatnosti, linearne algebre i algebre. Zamišljen je kao priručnik svima onima koji se profesionalno ili amaterski bave matematikom te svima koji žele upoznati osnove matematičke kulture.

Pojmovi se u rječniku najčešće obrađuju razvojno: uz suvremenu formulaciju daju se i podaci o vremenu u kojem je pojam nastao, o matematičarima koji su za to zaslužni, o nastanku naziva i oznake. Pojmovi su obično popraćeni primjerom, crtežom ili slikom, a upućuje se i na veze s drugim matematičkim pojmovima ili tvrdnjama. Ako je naziv nastao prema grčkim, latinskim ili riječima iz nekog drugog stranog jezika, u rječ-

niku je o tome u pravilu dana informacija. Uz međunarodni naziv često se navode i hrvatski nazivi. Svaki od predloženih hrvatskih naziva pojavljivao se u hrvatskoj literaturi, ali neki su više, a neki manje uobičajeni.

Osim matematičkih pojmova, u rječniku se nalazi preko 300 kratkih životopisa istaknutih matematičara. Mnogi od njih bili su i fizičari, astronomi, geodeti, filozofi itd., ali to nije uvijek navedeno. Matematičari 20. stoljeća odabrani su prema egzaktnim mjerilima: to su pretežno dobitnici Fieldsove medalje ili matematičari koji su riješili neki Hilbertov problem.

Pri navođenju hrvatskih matematičara primijenjeno je načelo povijesne distance, tako da među životopisima nema biografija živućih. Ipak se u tekstu spominje nekoliko suvremenih hrvatskih matematičara čiji su rezultati stari 20 i više godina, a pridonijeli su matematici. Mladi su hrvatski matematičari posljednjih godina dali ozbiljan doprinos matematici: riješili su neke dugo neriješene matematičke probleme, rezultati su im objavljeni u najvažnijim svjetskim matematičkim časopisima, profesori su na vodećim svjetskim sveučilištima, autori su matematičkih knjiga u izdanju slavni izdavačkih kuća itd. No njihova imena nisu ušla u *Matematički rječnik* jer on i nije namijenjen razmatranju znanstvenih činjenica nego se preporučuje učenicima, studentima i njihovim nastavnicima te praktičarima koji se susreću s matematikom.

Na kraju knjige je ljetopis u kojem su kronološki poredani važniji matematički događaji.

Vrijednosti knjige sigurno su pridonijeli recenzenti: akademik Vladimir Devidé, prof. dr. sc. Vladimir Volenec i mr. sc. Alemko Gluhak te urednik prof. dr. sc. Neven Elezović.

Knjiga je tvrdo ukoričena, ima 282 stranice, velik broj crteža i ilustracija, a može se po vrlo pristupačnoj cijeni nabaviti kod nakladnika:

Element

10000 Zagreb

Republike Austrije 11.

Miljenko Lapaine

NAGRAĐENI STUDENTSKI RADOVI

Već po tradiciji, svake godine rektor Sveučilišta u Zagrebu nagrađuje najbolje studentske radove. Pod student-skim radom smatra se rad:

- znanstvenog, odnosno stručnog sadržaja, koji je rezultat istraživanja jednog ili više autora, odnosno radnog tima (grupe);

- koji može biti u vezi s temom obrađenom u diplomskom radu, ali ne može biti integralni tekst diplomskog rada;

- koji je u prvom redu povezan s tematikom sadržanom u nastavnom programu, ali može biti i izvan navedene tematike;

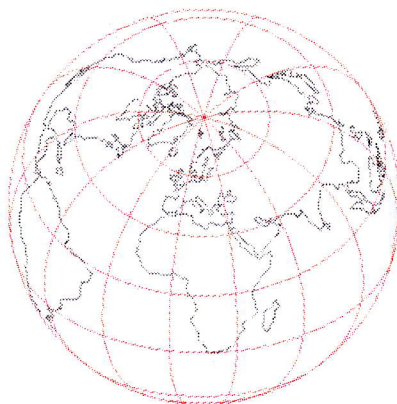
- koji je povoljno ocijenio jedan nastavnik i predložio za nagrađivanje, a ocjenu i prijedlog prihvatilo Povjerenstvo za studentske radove pojedinog fakulteta.

U posljednjih deset godina Geodetski fakultet za Rektorovu nagradu redovito predlaže nekoliko studentskih radova. Nastavnici Geodetskog fakulteta svake godine studentima predlažu teme za obradu, ali se i student može obratiti nastavniku s vlastitom idejom i predložiti temu koju će obraditi. U oba slučaja studenti izrađuju rad pod vodstvom nastavnika mentora.

Prikazat ćemo šest studentskih radova nagrađenih od 1994. do 1996. godine koji se po sadržaju uklapaju u problematiku kojom se bavi Hrvatsko društvo za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku. Teme svih radova predložio je M. Lapaine, koji je bio voditelj studenata i povoljno je ocijenio radove. Radove je zatim povoljno ocijenilo i Povjerenstvo Geodetskog fakulteta za studentske radove. U nastavku navodimo njegove ocjene.

Jadranka Mrvelj: VANJSKE PERSPEKTIVNO-AZIMUTALNE PROJEKCIJE

Kod perspektivnih kartografskih projekcija točke elipsoida ili sfere projiciraju se po zakonima perspektive na ravninu projiciranja. Kod perspektivno-azimutalnih projekcija pravac



Vanjska perspektivno-azimutalna projekcija

koji prolazi središtem projiciranja i središtem sfere mora biti okomit na ravninu projiciranja. Perspektivne projekcije poznate su odavno, a zadržale su svoju važnost sve do današnjih dana, jer omogućavaju matematički opis fotografskih snimaka Zemlje iz zraka ili svemira.

U svome radu studentica Jadranka Mrvelj bavi se vanjskim perspektivno-azimutalnim projekcijama s negativnim prikazom. Glavni dio rada posvećen je općoj teoriji tih projekcija. Izvedene su sve potrebne jednadžbe, a neke od njih predstavljaju mali korak naprijed u odnosu na postojeću literaturu.

Posebna pozornost poklonjena je ispitivanju deformacija vanjskih perspektivno-azimutalnih projekcija. Za razliku od klasičnog pristupa, kada su se kvantitativni pokazatelji o linearnim, kutnim i površinskim deformacijama davali u tabličnom obliku, u ovome radu prednost je dana grafičkom načinu izražavanja.

Crteži uz tekst izrađeni su u AutoCAD-u i zatim iscertani na papir uz pomoć plotera Roland DXY 1100. Za ilustraciju raspodjele deformacija perspektivno-azimutalnih projekcija dan je u prilogu cijeli niz crteža. Oni su najprije izrađeni s pomoću vlastitih programa u Quick Basicu. Ti programi, osim iscertavanja na ekranu monitora, imaju mogućnost pohrane koordinata točaka u odgovarajuće datoteke koje su zatim primijenjene kao ulaz u programe Grapher ili Surfer, već prema tome radi li se o grafičkom prikazu krivulje ili plohe. Ta dva programa, osim uređivanja i iscertavanja na ekranu monitora, imaju mogućnost

pohrane koordinata točaka u .DXF datoteke, koje je moguće učitati u AutoCAD. Konačna obrada crteža obavljena je u AutoCAD-u, a rezultat iscertan uz pomoć plotera Roland DXY 1100 ili printera HP LaserJet 4L.

Povjerenstvo je ocijenilo da je to vrijedan rad, koji uspješno objedinjuje kartografiju, matematiku i informatiku.

Rad je nagrađen Rektorovom nagradom 1994. godine.

Kirčo Arsov: NOŽIŠNA KRIVULJA

Noviškina krivulja elipse susreće se u geodeziji u teoriji pogrešaka pri ispitivanju pogreške položaja točke u proizvoljnom smjeru i u kartografiji kao krivulja lokalnih deformacija duljina. U matematici se nožišna krivulja definira ne samo za elipsu, nego za proizvoljnu krivulju. U diferencijalnoj geometriji izvodi se jednadžba nožišne krivulje za proizvoljnu krivulju uz pretpostavku da je ta krivulja parametrizirana prirodnim parametrom, duljinom luka.

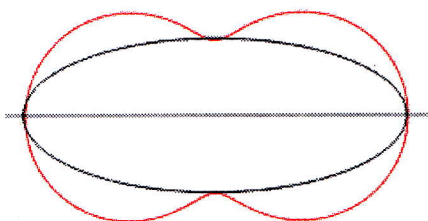
U svom je istraživanju student Kirčo Arsov pokazao da je pristup nožišnoj krivulji elipse na temelju prirodne parametrizacije nezgodan, jer se računanje duljine luka elipse svodi na eliptičke integrale koji se obično rješavaju primjenom razvoja u red. No, takav pristup ima smisla samo onda ako je ekcentricitet elipse mali, kao što je to primjerice kod meridijanske elipse. Međutim, za opću elipsu takav pristup zakazuje.

Stoga je student K. Arsov izveo jednadžbu nožišne krivulje za proizvoljnu krivulju parametriziranu proizvoljnim parametrom. Pokazuje se da takva jednadžba po svom obliku nije ništa složenija od odgovarajuće jednadžbe izvedene uz pretpostavku o prirodnom parametru. Na taj način mogla se sada izvesti jednadžba nožišne krivulje elipse koja je parametrizirana različitim parametrima.

Nadalje, izvedeno je daljnje pojednostavljenje jednadžbe nožišne krivulje proizvoljne krivulje u odnosu na proizvoljnu točku, za razliku od uobičajenog pristupa kad je ta točka ishodište koordinatnog sustava. Izvedena formula primijenjena je zatim na određivanje

jednadžbe nožišne krivulje elipse, parabole, hiperbole i cilindrične zavojnice u odnosu na proizvoljnu točku. U posljednjem poglavlju pokazana je mogućnost interpretacije nožišnih krivulja kao cisoida. Među njima se nalaze mnoge poznate krivulje kao što su kardioida, Dioklova cisoida ili Bernoullijeva lemniskata. Boothova lemniskata odgovara nožišnoj krivulji elipse u odnosu na njeno središte, odnosno geodetskoj krivulji pogrešaka.

Autor je sastavio vlastiti program u Quick Basicu za osobno računalo. Taj program, koji radi na temelju prethodno izvedenih formula, služi za dobivanje grafičkih prikaza nožišnih krivulja konika na temelju zadanih koeficijenata iz jednadžbe konike. Niz dobivenih crteža dan je u radu kao prilog.



Boothova lemniskata ili nožišna krivulja elipse s obzirom na pol u njenom središtu, u geodeziji predstavlja krivulju pogrešaka

Povjerenstvo Geodetskog fakulteta ocijenilo je da je to vrijedan rad, koji povezuje matematiku, geodeziju i kartografiju, otkrivajući novi moment u njihovu međudjelovanju.

Rad je nagrađen Rektorovom nagradom 1994. godine.

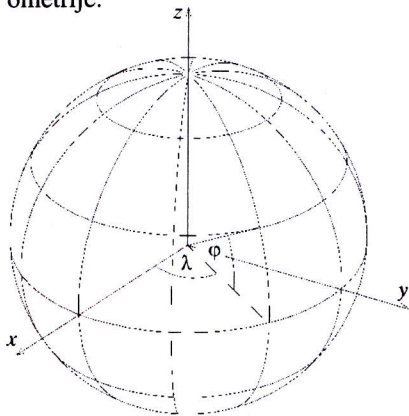
Kirčo Arsov:

SFERA I ELIPSOID U GEODEZIJI
U predmetu Matematika IV koji se predaje na Geodetskom fakultetu susreću se razne plohe: valjci, stošci, paraboloidi, hiperboloidi itd. Za geodeziju su od prvorazrednog značenja sfera i rotacijski elipsoid. Stoga je postavljen zadatak istraživanja upravo tih dviju ploha sa stajališta diferencijalne geometrije.

Pri tome je trebalo posebnu pozornost posvetiti parametarskim jednadžbama, singularnim točkama parametризacije, tangencijalnoj ravnini i nor-

mali, prvoj diferencijalnoj formi, duljini luka krivulje na plohi, kutu između dviju krivulja na plohi, površini dijela plohe, drugoj diferencijalnoj formi, normalnoj zakrivljenosti, Meusnierovom teoremu, glavnim zakrivljenostima, glavnim smjerovima, Eulerovom poučku, Dupinovoj indikatrиси, Gaußovoj zakrivljenosti, srednjoj zakrivljenosti, glavnim krivuljama zakrivljenosti, asimptotskim linijama, asimptotskim smjerovima, klasifikaciji točaka na plohi, Weingartenovim i Gaußovim derivacijskim formulama, Christoffelovim simbolima i geodetskim linijama.

Jednadžbe Zemljinog elipsoida i sfere predstavljaju osnovni alat pri rješavanju raznih zadataka i problema u geodeziji i kartografiji. One se ponekada u geodetskoj literaturi daju gotove, bez izvoda, što u nekim slučajevima otežava daljnje praćenje razvoja problematike. Stoga je i cilj ovoga rada bio izvođenje osnovnih relacija i formula na Zemljinoj sferi i elipsoidu na temeljima diferencijalne geometrije.



Mreža meridijana i paralela

Povjerenstvo je ocijenilo da je student Kirčo Arsov izradio vrijedan rad koji uspješno objedinjuje matematiku i geodeziju.

Rad je nagrađen Rektorovom nagradom 1995. godine.

Vlado Cetl:

ANALIZA KLASIFIKACIJSKIH ISPITA IZ MATEMATIKE NA GEODETSKOM FAKULTETU

Svake godine na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu održava se klasifikacijski ispit za upis novih

studenta. Ispit se sastoji od zadataka iz matematike i fizike. U ovome studentskom radu analizirani su rezultati klasifikacijskih ispita iz matematike, u prvom i drugom roku šk. god. 1994./1995.

Da bi se mogla dati analiza rezultata s ispita trebalo je riješiti sve zadatke koji su bili na ispitima te za svaki test posebno: poredati odgovore po veličini i prikazati rezultate grafički, izračunati srednju vrijednost točnih odgovora i standardno odstupanje, pogledati i pokušati obrazložiti koji su zadaci bili lakši, a koji teži, ispitati da li su zadaci koji su vrijedili 1 bod lakši od onih koji su vrijedili 2 boda, ispitati korelaciju između uspjeha na klasifikacijskom ispitu i uspjeha iz matematike u srednjoj školi te međusobno usporediti rezultate za oba roka. Analizirajući obrađene podatke V. Cetl je izveo niz zaključaka od kojih ovdje ističemo samo najzanimljivije. Ispitivanja su pokazala da pojedini zadaci koji su vrijedili 1 bod u oba roka nisu riješeni s prosjekom većim od srednje vrijednosti točnih odgovora na pojedinom roku. Obrnuto, ima zadataka koji su riješeni u najvećem prosjeku, a vrijedili su 2 boda. Dakle, sastavljači zadataka nisu najbolje procijenili težinu zadataka.

Korelacija između uspjeha na klasifikacijskim ispitima i uspjeha iz matematike u srednjoj školi vrlo je mala (0,15 u prvom i 0,09 u drugom roku) i može se zanemariti. To je potpuno neočekivani rezultat.

Obrada podataka rađena je na osobnom računalu. Tekst je pisan pomoću programa Word 6.0 for Windows, grafovi su rađeni pomoću Excela, a crteži pomoću CorelDrawa.

Povjerenstvo je ocijenilo da je student Vlado Cetl izradio vrijedan rad čiji će rezultati pomoći pri budućim klasifikacijskim postupcima te ga predložilo za Rektorovu nagradu.

Rad je nagrađen Rektorovom nagradom 1996. godine.

Dražen Švehla: **ORTODROMA**

U predmetu Matematika IV koji se predaje na Geodetskom fakultetu na predavanjima o krivuljama za ilustraciju se često koristi kružna zavoj-

nica. I u odgovarajućoj Zbirci zadataka (Žarinac-Fračula, 1990.) ima niz zadataka o kružnoj zavojnici: 54, 58, 62, 97, 99, 118, 151, 163 i 197.

Krivulje važne u geodeziji su ortodroma i loksodroma. Stoga je uočeno da bi bilo dobro gore navedene zadatke postaviti i zatim riješiti, ali tako da umjesto zavojnice bude jednom ortodroma, a drugi put loksodroma.

U radu koji prikazujemo obrađena je ortodroma. Ako se brod giba po najkraćoj spojnici dviju točaka na Zemljinoj sferi, tada je njegova trajektorija upravo ortodroma. Ortodroma ima značajnu primjenu i u kartografiji.

Formule sferne trigonometrije primjenjuju se u raznim područjima, kao što su, primjerice, astronomija, kartogra-

fija ili satelitska geodezija. Izvodi tih formula na klasičan način mogu se naći u literaturi. Međutim, osnovne formule sferne trigonometrije mogu se vrlo lako dobiti primjenom vektorske algebre. Odatle ideja da se problemima vezanim uz ortodromu također pristupi sa stajališta vektorske algebre uz malo proširenje pojmovima iz diferencijalne geometrije.

Povjerenstvo je ocijenilo da je student Dražen Švehla izradio vrijedan rad koji uspješno objedinjuje matematiku i geodeziju.

Rad je nagrađen Rektorovom nagradom 1995. godine.

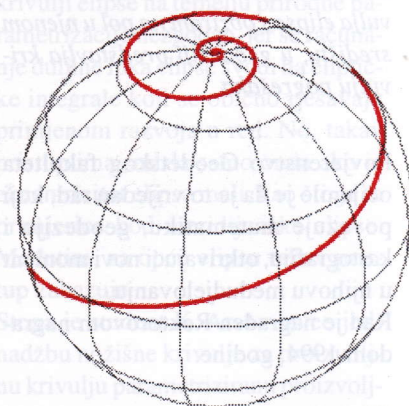
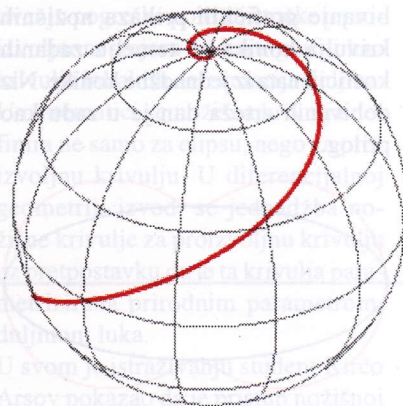
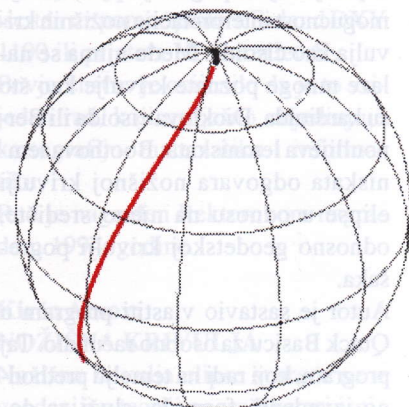
Dražen Švehla: LOKSODROMA NA SFERI

Ako se brod giba pod konstantnim azimutom po Zemljinoj sferi, tada je njegova trajektorija upravo loksodroma. Ona ima svoju značajnu primjenu i u kartografiji.

U prethodnom radu D. Švehla uspješno je obradio ortodromu, dok je u ovom radu vrlo detaljno obrađena loksodroma. Izvedena je njena jednadžba na temelju koje su se mogli dobiti i odgovarajući grafički prikazi u perspektivnoj projekciji. Nadalje, izvedene su jednadžbe vektora Frenetova trobrida, sferne indiktrise, fleksije, torzije i geodetske zakrivljenosti.

Posebno treba istaknuti formuliranje i rješavanje odgovarajućih osnovnih

geodetskih zadataka te prikaze loksodrome i ortodrome u Mercatorovoj i gnomonskoj projekciji.



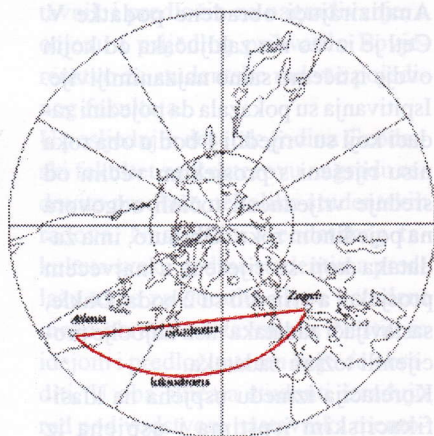
Loksodroma

Svoj rad D. Švehla je izradio uz pomoć osobnog računala i programa Quick Basic, AutoCAD, DrawPerfect i WordPerfect.

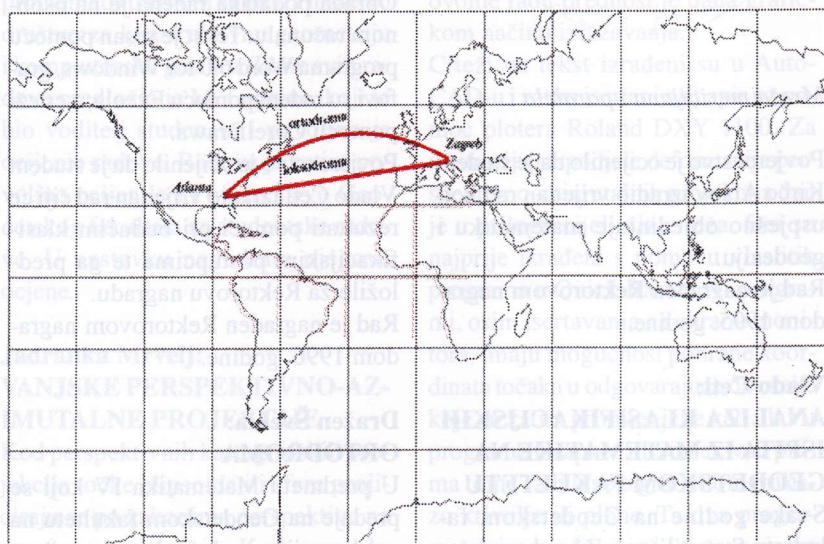
Povjerenstvo je ocijenilo da je student Dražen Švehla izradio vrijedan rad koji uspješno objedinjuje matematiku, geodeziju i kartografiju te ga predložilo za Rektorovu nagradu.

Rad je nagrađen Rektorovom nagradom 1996. godine.

Miljenko Lapaine



Ortodroma i loksodroma u gnomonskoj projekciji



Ortodroma i loksodroma u Mercatorovoj projekciji

STADIK d.o.o.

statika i dinamika konstrukcija, projektiranje, zastupanje, građenje
Zagreb, Badalićeva 27, tel.(fax) (0)1 323 451

